



La mesure est une activité fondamentale en sciences expérimentales. Connaître la valeur de la grandeur mesurée est tout aussi important que d'être capable d'estimer la précision avec laquelle on la connaît.

I - Variabilité en science expérimentale

I.1 - Sources de variabilité

En science expérimentale, la variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !

Les principales sources de variabilité sont les suivantes.

Source	Exemple
Choix de la méthode de mesure	Choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision.
L'environnement	La célérité du son dépend de la température. Faire l'expérience le matin ou l'après-midi de donnera donc pas le même résultat.
L'instrument de mesure	Mesurer une tension avec deux voltmètres différents amène parfois à une mesure de tension légèrement différente.
L'expérimentateur	C'est bien souvent la principale source de variabilité ! Par exemple, la lecture d'un volume en chimie à l'aide de la position du ménisque demande un certain savoir-faire.

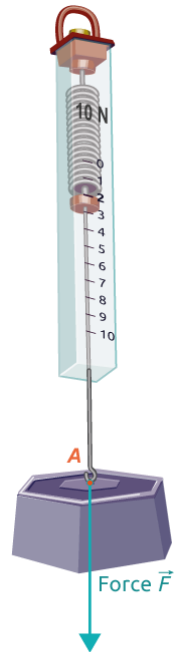
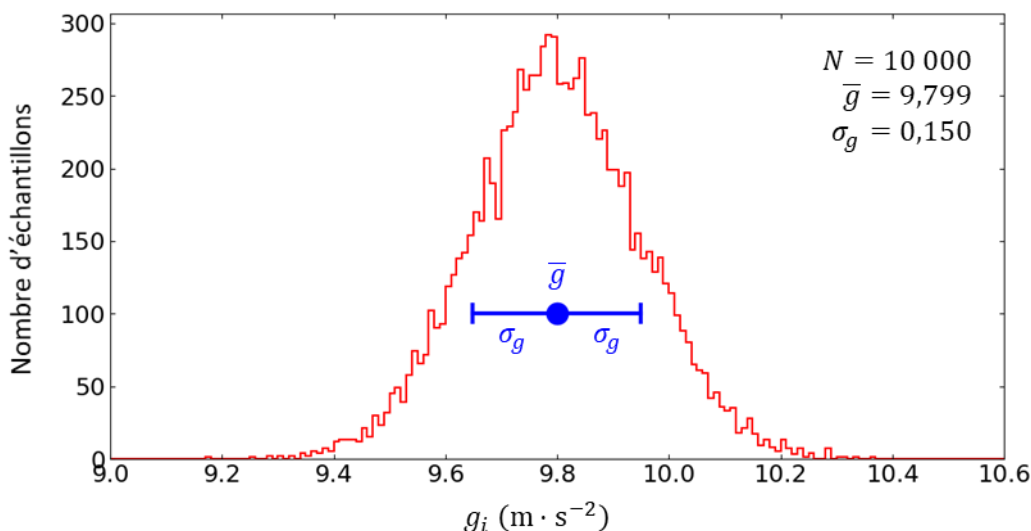
I.2 - Analyse statistique d'une série de mesure

On suppose que le but d'un TP est de mesurer l'accélération de pesanteur g . Le protocole consiste à mesurer le poids P d'une masse m à l'aide d'un dynamomètre. On en déduit ainsi :

$$P = mg \Rightarrow g = \frac{P}{m}$$

La même mesure est répétée un grand nombre de fois (N). On obtient ainsi N valeurs de la pesanteur, notées g_i pour $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$.

Les résultats sont tracés dans l'histogramme ci-dessous.



Soit une série de mesures $\{x_i\}$. On définit la **valeur moyenne** \bar{x} et l'**écart-type** σ_x de la distribution :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{et} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

La valeur moyenne indique le « centre » de la distribution et l'écart-type indique son « étalement » : plus σ_x est grand, plus la distribution est étalée.

Définition :

En physique, on appelle **incertitude-type**, noté $u(x)$, l'écart-type d'une courbe de distribution de valeurs $\{x_i\}$.

$$u(x) = \sigma_x$$

Elle quantifie l'incertitude de l'expérimentateur sur sa connaissance de chacune des mesures x_i .

On appelle **incertitude-type relative** la grandeur :

$$\frac{u(x)}{x}$$

I.3 - Compatibilité de deux mesures

L'objectif de cette partie est de donner un critère objectif pour comparer deux mesures. Il peut s'agir de deux mesures venant d'un même binôme de TP, de deux binômes différents, ou d'une mesure de TP et d'une valeur tabulée.

Définition :

Soit deux mesures x_1 et x_2 d'incertitude-type respective $u(x_1)$ et $u(x_2)$. On appelle **écart normalisé** la grandeur :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

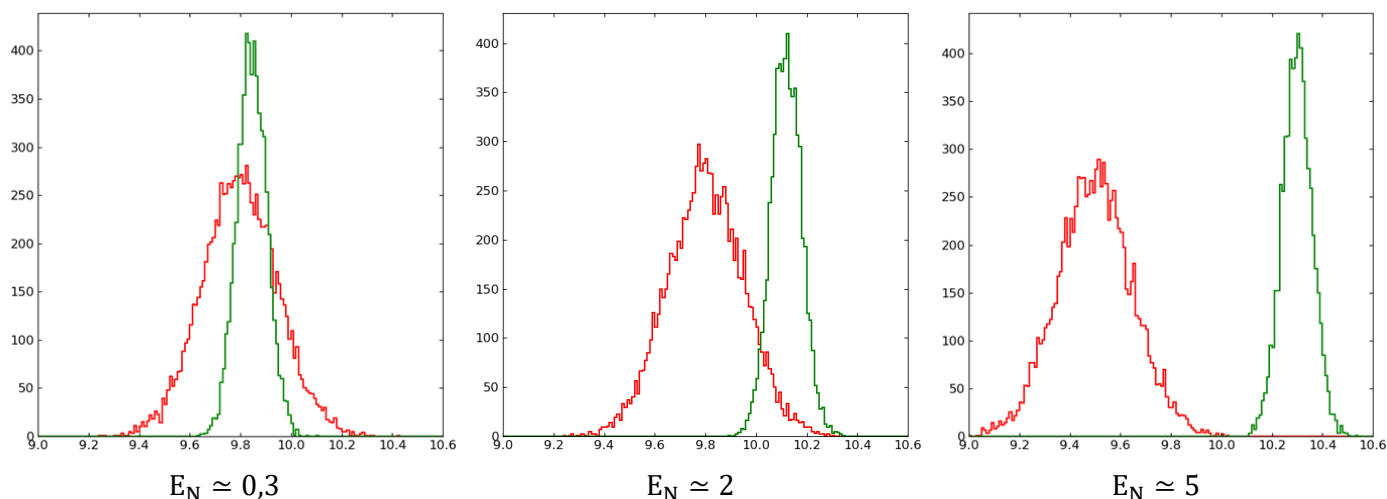
Propriété :

Pour un TP de physique, les deux mesures sont **compatibles** entre elles si :

$$E_N \leq 2$$

Remarque :

Intuitivement, deux mesures sont compatibles si leur histogramme se « chevauchent bien ».



II - Déterminer une incertitude-type

II.1 - Incertitude de type A

Soit une série de N mesures $\{x_i\}$. On rappelle que $u(x)$ introduit précédemment correspond à l'incertitude-type sur chacune des mesures x_i , et non pas sur l'ensemble des mesures $\{x_i\}$.

Propriété :

L'incertitude-type de la moyenne de la distribution $u(\bar{x})$ est donnée par :

$$u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$$

En effet, parmi deux distributions ayant même valeur moyenne \bar{x} et même l'incertitude-type $u(x)$, nous aurons « plus confiance » en celle réalisée avec $N = 10^6$ points de mesure que celle réalisée avec seulement $N = 10$. Il est donc attendu que l'incertitude-type sur la moyenne diminue avec le nombre de mesures.

Bilan · Incertitudes de type A

On réalise N fois la même mesure pour obtenir les points expérimentaux $\{x_i\}$.

On calcule la valeur moyenne \bar{x} et l'écart-type $u(x)$ de la distribution $\{x_i\}$. On en déduit l'incertitude-type sur la moyenne $u(\bar{x}) = u(x)/\sqrt{N}$.

Le résultat de l'expérience s'écrit : $\bar{x} \pm u(\bar{x})$.

Remarque : présentation du résultat sur une copie

- écrire $u(\bar{x})$ avec 1 ou 2 chiffres significatifs ;
- écrire \bar{x} en s'arrêtant à la même décimale que $u(\bar{x})$.

II.2 - Incertitude de type B

Bien souvent, la mesure ne présente pas de variabilité ou seule une unique mesure peut être réalisée. Dans ce cas, il n'est pas possible de réaliser un traitement des incertitudes de type A.

L'expérimentateur doit alors réaliser une seule mesure, et estimer la plus petite plage dans laquelle il est certain de trouver la valeur recherchée. On note \bar{x} la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $\bar{x} \pm \Delta$.

Exemple :

L'intervalle Δ doit être pris le plus faible possible selon les critères personnels de l'expérimentateur et selon les conditions de l'expérience. Il ne doit pas y avoir de règle générale. Par exemple avec une règle graduée au millimètre, si la valeur tombe directement sur une graduation, il est naturel de prendre $\Delta = 0,25$ mm, tandis que si la valeur est entre deux graduations, on prendra plus naturellement $\Delta = 0,5$ mm. Et enfin, un expérimentateur peu sûr de lui peut choisir de prendre dans le même cas $\Delta = 1$ mm.

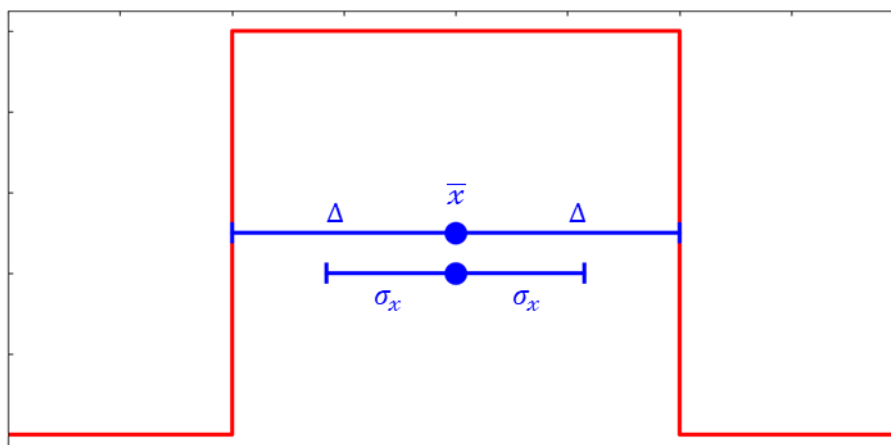
Propriété :

Dans ce cas de figure, l'incertitude-type sur la mesure vaut :

$$u(\bar{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Elle correspond à l'écart-type d'une loi uniforme de largeur 2Δ .

Loi uniforme de largeur 2Δ



Bilan · Incertitudes de type B

On réalise une unique mesure. On détermine \bar{x} et Δ de sorte la grandeur recherchée soit, de manière certaine, dans l'intervalle $\bar{x} \pm \Delta$.

On en déduit l'incertitude-type sur la mesure $u(\bar{x}) = \Delta/\sqrt{3}$.

Le résultat de l'expérience s'écrit : $\bar{x} \pm u(\bar{x})$.

Application :

Pour réaliser la mesure de la pesanteur, nous avons besoin de mesurer la masse sur une balance. Cette mesure ne présente aucune variabilité, la balance affiche toujours :

$$m = 500,0 \text{ g}$$

Il n'est donc pas possible de réaliser un traitement des incertitudes de type A.

On pose donc $\bar{m} = 500,0 \text{ g}$. On estime à $\Delta = 0,05 \text{ g}$ la demi-largeur dans laquelle se trouve la valeur de la masse.

En effet, si $m > 500,05 \text{ g}$, la balance aurait arrondi le résultat à $500,1 \text{ g}$, ce qui n'est pas le cas.

On en déduit :

$$u(\bar{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = 0,029 \text{ g}$$

Résultat de la mesure de la masse :

$$m = 500,000 \pm 0,029 \text{ g}$$

Vérification numérique du résultat :

Nous allons tenter de comprendre ce résultat, en faisant le lien avec les incertitudes de type A.

On considère que l'expérimentateur aurait pu choisir **au hasard** n'importe quelle valeur dans l'intervalle $\bar{x} \pm \Delta$. Nous allons donc demander à un programme informatique de réaliser pour nous une série de N mesures $\{x_i\}$, en choisissant à chaque fois x_i de manière aléatoire dans l'intervalle $\bar{x} \pm \Delta$, puis nous allons réaliser un traitement d'incertitudes de type A sur cette série de mesure.

Pour $N = 10^6$ « mesures », on retrouve : $m = 500,000 \pm 0,029 \text{ g}$.

 Détails du code Python dans le chapitre D3.

III - Composer des incertitudes-types

III.1 - Cas simples

Soit une grandeur y qui s'écrit comme une somme, une différence, un produit ou un quotient de deux grandeurs x_1 et x_2 . L'incertitude-type $u(y)$ vaut :

$$\begin{array}{l} y = x_1 + x_2 \quad \text{ou} \quad y = x_1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad u(y)^2 = u(x_1)^2 + u(x_2)^2 \\ y = x_1 \times x_2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 \end{array}$$

Vérification numérique des résultats :

 Détails du code Python dans le chapitre D3.

Application :

Pour réaliser la mesure de la pesanteur, nous avons déterminé à l'aide d'une unique mesure :

$$m = 500,000 \pm 0,029 \text{ g} \quad \text{et} \quad P = 4,900 \pm 0,058 \text{ N}$$

On en déduit :

$$\bar{g} = \frac{\bar{P}}{\bar{m}} = \frac{4,900}{0,5000} = 9,800 \quad \text{et} \quad u(\bar{g}) = \bar{g} \sqrt{\left(\frac{u(\bar{P})}{\bar{P}}\right)^2 + \left(\frac{u(\bar{m})}{\bar{m}}\right)^2} = 0,12$$

Résultat :

$$g = 9,80 \pm 0,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Cette valeur est-elle compatible avec la valeur tabulée à paris : $g_{tab} = 9,890\ 98 \pm 0,000\ 01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

On calcule l'écart normalisé :

$$E_N = \frac{|\bar{g} - \bar{g}_{tab}|}{\sqrt{u(\bar{g})^2 + u(\bar{g}_{tab})^2}} = \frac{|9,80 - 9,890\ 98|}{\sqrt{(0,12)^2 + (0,000\ 01)^2}} = \boxed{0,082 < 2}$$

La mesure est compatible avec la grandeur tabulée.

III.2 - Cas quelconque

Lorsqu'une formule est plus complexe qu'une somme ou un produit, l'incertitude-type sera évaluée directement à l'aide d'une simulation de Monte-Carlo, en suivant la même démarche que lors des précédentes simulations.

IV - Régression linéaire

IV.1 - Validation du modèle affine

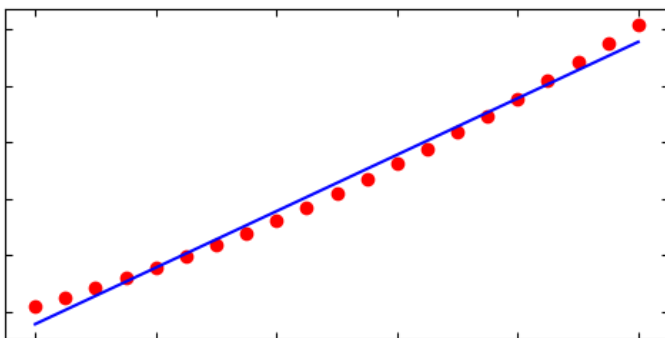
a) Validation qualitative

Dans cette partie, on cherche à vérifier si deux variables x et y sont reliées par une fonction affine, c'est-à-dire par la relation : $y \simeq a x + b$, avec a et b des constantes à déterminer. Pour cela, on va réaliser une régression affine, que l'on appelle plus communément (par abus de langage) une régression linéaire.

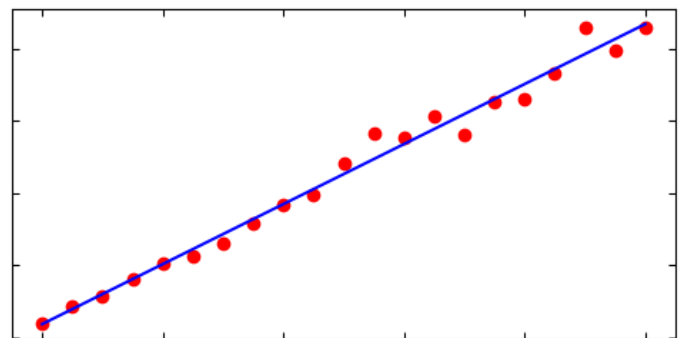
Avant toute chose, il est obligatoire d'afficher les points expérimentaux seuls et d'estimer à « l'œil nu » si un modèle affine est réaliste. Il faut ensuite demander à son logiciel préféré d'effectuer une régression linéaire. L'algorithme convergera toujours vers les paramètres (a, b) optimaux, mais c'est à l'expérimentateur de vérifier que la modélisation lui convient.

Pour cela, il faut superposer la droite de régression et les points expérimentaux. Deux critères sont à vérifier :

- les points expérimentaux doivent être « proches » de la droite de modélisation ;
- il ne doit pas y avoir de tendance non-linéaire nette dans les points expérimentaux.



Tendance parabolique \Rightarrow Modèle affine rejeté



Modèle affine validé *qualitativement*

b) Validation quantitative

Hypothèse :

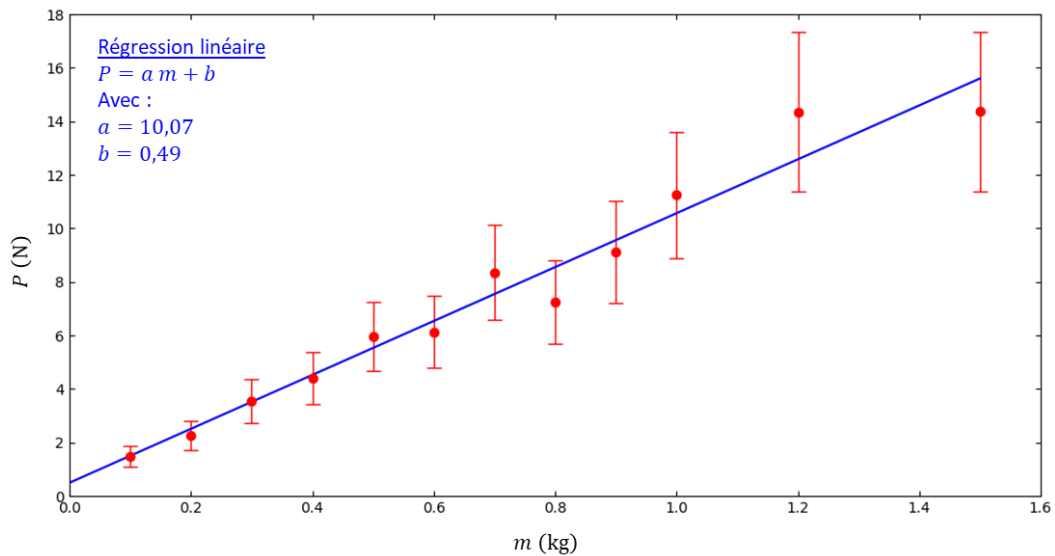
On suppose que x est mesuré avec une très grande précision, donc seule l'incertitude-type sur y joue un rôle pertinent. Si en pratique c'est l'inverse qui est vérifié, tracer x en fonction de y au lieu de y en fonction de x .

Afin de valider ou rejeter le modèle affine, il faut réaliser l'une des deux analyses suivantes, qui sont parfaitement équivalentes.

Méthode 1 :

Représenter sur le graphique chaque point avec une barre d'incertitude égale à $2 u(y)$.

Le modèle affine est validé si la droite de régression passe par les barres d'incertitude de l'ensemble des points.

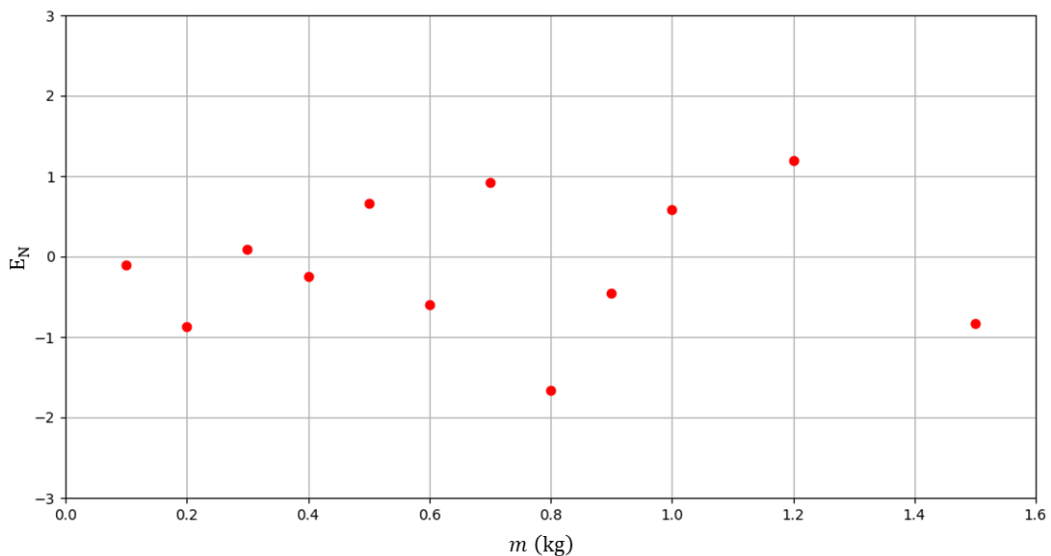


Méthode 2 :

Tracer les écarts normalisés E_N en fonction de x .

$$E_N = \frac{y - (a x + b)}{u(y)}$$

Le modèle affine est validé si $|E_N| < 2$ pour toute valeur de x .



IV.2 - Incertitude sur les paramètres de régression

L'objectif est d'obtenir les incertitudes-type $u(\bar{a})$ et $u(\bar{b})$ des paramètres a et b . Cette étape, hors programme, ne sera mise en place que lors des TIPE en cas de besoin.

Nous allons procéder à une simulation de Monte-Carlo, selon le protocole suivant :

- remplacer chaque point de mesure y_i par point aléatoire pris dans l'intervalle $y_i \pm \Delta$;
- effectuer une régression linéaire pour obtenir une valeur de a et b ;
- recommencer le processus un grand nombre de fois pour obtenir une collection de valeur de $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$;
- faire une analyse statistique de cette distribution pour en extraire les valeurs moyennes \bar{a} et \bar{b} , et les incertitudes-type $u(\bar{a})$ et $u(\bar{b})$.