**Divers | Chapitre 4 | Cours**

# D4 · Les équations différentielles en physique

Ce cours ne doit pas de substituer au cours de mathématique. Son but est de vous aider à maitriser les équations différentielles rencontrées en physique en CPGE et de vous donner une intuition physique de ces équations.

## I - Équations différentielles

### I.1 - Définitions

Une **équation différentielle** (ED) est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Une ED est dite **homogène** lorsque le second membre de l'équation est égale à 0.

Une ED est dite **linéaire** si toute combinaison linéaire de solutions de l'équation homogène est également une solution de l'équation homogène.

On appelle **ordre** de l'ED, l'ordre de la dérivée la plus élevée qui apparait dans l'équation.

Exemples :

$$\frac{df}{dt} + 3\,f(t) = \cos(\omega t)$$ ED linéaire d'ordre 1

$$\frac{df}{dt} + 3\,f(t) = 0$$ Équation homogène de l'ED précédente

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 8\,\frac{df}{dt} + \cos\big(f(t)\big) = 3$$ ED (non linéaire) d'ordre 2

Propriété :

La solution générale d'une ED linéaire est la fonction que l'on obtient en additionnant la solution générale de l'équation homogène (SEH) à une solution particulière (SP) de l'ED.

$$f(t) = f_{SEH}(t) + f_{SP}(t)$$

### I.2 - Interprétation physique

Pour l'ensemble des ED vues en cours de physique, on admet que $f_{SEH}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ avec un temps caractéristique $\tau$. On en déduit que pour des temps $t \gg \tau$, la solution de l'ED est égale à la solution particulière : $f(t \gg \tau) \simeq f_{SP}(t)$.

Définitions et propriétés :

On appelle **régime transitoire** l'intervalle de temps $t \in [0, 5\tau]$. L'allure de $f(t)$ durant le régime transitoire est donnée par $f_{SEH}(t)$.

On appelle **régime établi** l'intervalle de temps $t \gg \tau$. Dans ce régime, $f(t) = f_{SP}(t)$. De plus, $f_{SP}(t)$ est une fonction qui « ressemble » au second membre $g(t)$. En particulier :

- Si $g(t) = \mathrm{G}_0$ (une constante), alors $f_{SP}(t) = \mathrm{F}_0$. On parle de **régime stationnaire**.
- Si $g(t) = \mathrm{G}_0 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$, alors $f_{SP}(t) = \mathrm{F}_0 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$. On parle de **régime sinusoïdal**.

## II - Solutions des équations différentielles

### II.1 - Méthode générale

Pour le cours de physique, vous devez apprendre par cœur :

- la forme canonique des ED ;
- la solution de l'équation homogène de ces différentes ED.

**Équation différentielle**

Est-elle linéaire ? — Oui → Les coefficients sont-ils constants ? — Oui → **EDL à coefficients constants**

Non → Une indication est-elle donnée dans l'énoncé ?

Oui → Suivre l'indication

Non → **Méthode de la séparation des variables**

**EDL à coefficients constants**

♥ Mettre l'équation sous **forme canonique** ♥

♥ Déterminer la solution de l'équation homogène (**SEH**) ♥
⟼ donne la durée et la forme du **régime transitoire**

Type : circuits RC, RL

$$\frac{df}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = g(t) \quad \longrightarrow \quad f_{SEH}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Type : oscillateur harmonique

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \omega_0^2\, f(t) = g(t) \quad \longrightarrow \quad f_{SEH}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = U_m\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Type : pénétration de la chaleur

$$\frac{d^2f}{dt^2} - \frac{f(t)}{\tau^2} = g(t) \quad \longrightarrow \quad f_{SEH}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{B}\,e^{t/\tau} = C\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{\tau}\right) + D\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Type : oscillateur amorti

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{df}{dt} + \omega_0^2\, f(t) = g(t)$$

Signe du discriminant ?

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\,\omega_0^2$$

Poser : $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \sqrt{|\omega_0^2 - \lambda^2|}$

$$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad f_{SEH}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) = U_m\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \phi)$$

$$\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad f_{SEH}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,(A\,\mathrm{e}^{-\Omega t} + B\,\mathrm{e}^{\Omega t}) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\big(C\,\mathrm{ch}(\Omega t) + D\,\mathrm{sh}(\Omega t)\big)$$

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{SEH}(t) = \mathrm{e}^{-\omega_0 t}\,(A\,t + B)$$

Déterminer une solution particulière (**SP**)
⟼ décrit le **régime permanant**, de la même « forme » que le forçage $g(t)$

$$f(t) = f_{SEH}(t) + f_{SP}(t)$$

Déterminer les **constantes d'intégration** à l'aide des **conditions initiales** (CI) ou des **conditions aux limites** (CL)

## II.2 - Comment retrouver les solutions ?

Soit une ED homogène linéaire à coefficients constants :

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \frac{d^n f(t)}{dt^n} = a_0 \cdot f(t) + a_1 \cdot \frac{df}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2f}{dt^2} + \cdots = 0$$

Les solutions sont des fonctions exponentielles : $f(t) = e^{rt}$. Réinjectons cette solution dans l'ED. Après division par $e^{rt}$, on obtient le **polynôme caractéristique** de l'ED :

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cdot r^n = a_0 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r^2 + \cdots = 0$$

Notons $r_n$ les racines de ce polynôme. Puisque l'ED est linéaire, la solution générale est une combinaison linéaire de ces fonctions exponentielles :

$$f(t) = \sum_n A_n \cdot e^{r_n t}$$

Applications :

- Une ED linéaire d'ordre 1 a pour solution : $f(t) = A\, e^{rt} + f_{SP}(t)$
- Une ED linéaire d'ordre 2 a pour solution : $f(t) = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, e^{r_2 t} + f_{SP}(t)$

## II.3 - Méthode de la séparation des variables

Lorsque l'ED le permet, il est possible de la réécrire en faisant apparaitre l'une des deux variables uniquement dans le membre à gauche du signe égal, et l'autre variable uniquement dans le membre à droite du signe égal. Il est alors possible d'intégrer chaque membre indépendamment.

Des exemples sont notamment rencontrés dans le cours de cinétique chimique.

Exemple :

Soit une loi de vitesse de la forme :

$$\frac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{k[A]}^2$$

On sépare les deux variables $[\mathrm{A}]$ et $t$. On obtient :

$$\frac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{[A]}^2} = -\mathrm{k\,d}t$$

On intègre entre un instant initial (indicé par 0) et un instant quelconque.

$$\int_{[\mathrm{A}]_0}^{[\mathrm{A}]} \frac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{[A]}^2} = -\mathrm{k}\int_0^t \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{[\mathrm{A}]} + \frac{1}{[\mathrm{A}]_0} = -\mathrm{k}\,t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[\mathrm{A}] = \frac{[\mathrm{A}]_0}{1 + [\mathrm{A}]_0\,\mathrm{k}\,t}}$$

# III - Régime sinusoïdal forcé

## III.1 - Solution particulière d'une ED en RSF

Lorsque l'ED est linéaire et que le terme de forçage est sinusoïdal, il est possible de passer en notation complexe afin de trouver plus facilement la solution en régime établi (c'est-à-dire la solution particulière de l'ED).

Rappel :

À tout signal réel $s(t) = \mathrm{S_m}\cos(\omega t + \phi)$ est associé un signal complexe $\underline{s}(t) = \mathrm{S_m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi)} = \underline{\mathrm{S_m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. On appelle **amplitude complexe** le terme : $\underline{\mathrm{S_m}} = \mathrm{S_m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$.

Opérations en notation complexe : $\boxed{\mathrm{d/dt} \to \mathrm{j\omega}}$ et $\boxed{\int \mathrm{dt} \to 1/\mathrm{j\omega}}$.

Application :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{df}{dt} + \omega_0^2\, f(t) = \mathrm{G_m}\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \left(-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{\mathrm{F_m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{G_m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathrm{F_m}} = \frac{\mathrm{G_m}}{-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

On en déduit :

$$f_{SP}(t) = \mathrm{F_m}\cos(\omega t + \phi) = \left|\underline{\mathrm{F_m}}\right|\cos\left(\omega t + \arg\left(\underline{\mathrm{F_m}}\right)\right)$$

## III.2 - Forme canonique des filtres

À l'aide du même raisonnement que dans l'exemple précédent et en se rappelant que la fonction de transfert d'un filtre s'écrit : $\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$, on en déduit les formes canoniques des filtres :

| **Équation différentielle** | **ED en complexe** | **Forme canonique du filtre** |
|---|---|---|
| $\frac{ds}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$ | $\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)\underline{\mathrm{S_m}} = \frac{\underline{\mathrm{E_m}}}{\tau}$ | $\underline{H} = \frac{1}{1+jx}$ avec : $x = \omega\tau$ |
| $\frac{ds}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = \frac{de}{dt}$ | $\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)\underline{\mathrm{S_m}} = j\omega\, \underline{\mathrm{E_m}}$ | $\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}$ avec : $x = \omega\tau$ |
| $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2\, s(t) = \omega_0^2\, e(t)$ | $(-\omega^2 + \omega_0^2)\, \underline{\mathrm{S_m}} = \omega_0^2\, \underline{\mathrm{E_m}}$ | $\underline{H} = \frac{1}{1-x^2}$ avec : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ |
| $\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{s(t)}{\tau^2} = \frac{e(t)}{\tau^2}$ | $\left(-\omega^2 - \frac{1}{\tau^2}\right)\underline{\mathrm{S_m}} = \frac{\underline{\mathrm{E_m}}}{\tau^2}$ | $\underline{H} = -\frac{1}{1+x^2}$ avec : $x = \omega\tau$ |
| $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2\, s(t) = \omega_0^2\, e(t)$ | $\left(-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{\mathrm{S_m}} = \omega_0^2\, \underline{\mathrm{E_m}}$ | $\underline{H} = \frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$ avec : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ |