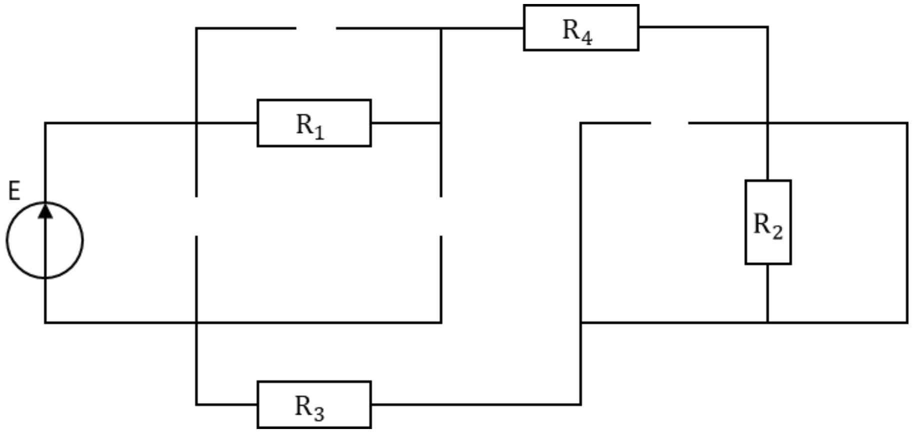
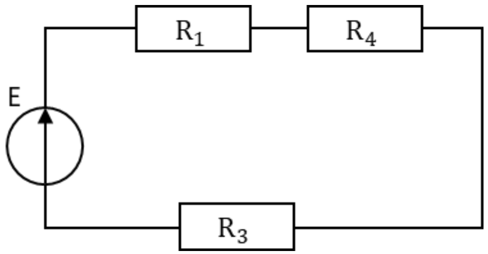
Électrocinétique | Chapitre 2 | Correction TD (E2)

Exercice n°1 - Circuit équivalent ★☆☆

Aux temps longs, un condensateur est équivalent à un circuit ouvert et une bobine à un fil électrique. Le circuit est donc équivalent à :



Ce qui se représente plus simplement par :



Exercice n°2 - Circuit RC série en régime libre ★☆☆

1) Déterminons les grandeurs en $t = 0^-$. Le condensateur est équivalent à un circuit ouvert, donc $i(0^-) = 0$. La loi d'Ohm donne : $u_R(0^-) = 0$. La loi des mailles donne : $u_c(0^-) = E$.

La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue, donc :

$$\boxed{u_c(0^+) = E}$$

La loi des mailles donne (interrupteur en position 1) :

$$0 = u_R + u_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_R(0^+) = -E}$$

Finalement, la loi d'Ohm donne :

$$\boxed{i(0^+) = -\frac{E}{R}}$$

Lorsque $t > +\infty$, on atteint de nouveau un régime permanant. En suivant le même raisonnement, on obtient :

$$\boxed{i(+\infty) = 0} \qquad \boxed{u_R(+\infty) = 0} \qquad \boxed{u_C(+\infty) = 0}$$

2) La loi des mailles donne :

$$0 = u_R + u_c = Ri + u_c = RC\frac{du_c}{dt} + u_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC} = 0}$$

On pose :

$$\boxed{\tau = RC}$$

La solution est :

$$u_c(t) = A\, e^{-t/\tau}$$

Or, avec les conditions initiales :

$$u_c(0^+) = \mathrm{A} = E$$

On en déduit :

$$\boxed{u_c(t) = E\, e^{-t/\tau}}$$

3) Pour effectuer un bilan de puissance, on multiplie la loi des mailles par i.

$$\begin{aligned} 0 = Ri + u_c \quad &\Rightarrow \quad 0 = Ri^2 + u_c i \\ &\Rightarrow \quad 0 = Ri^2 + u_c \cdot C\frac{du_c}{dt} \\ &\Rightarrow \quad \boxed{0 = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{\frac{1}{2}Cu_c^2}_{\mathcal{E}_{elec}}\right)} \end{aligned}$$

Après bascule de l'interrupteur, aucune puissance n'est fournie au système. L'énergie initialement stockée dans le condensateur est perdue par effet Joule.

Exercice n°3 - Conditions initiales et d'équilibre ★★☆

1) Initialement, les condensateurs sont déchargés, donc $u_C(0^-) = 0$ aux bornes des deux condensateurs. Par continuité de la tension aux bornes des condensateurs, $u_C(0^+) = 0$ aux bornes des deux condensateurs.

Appliquons une loi des mailles en $t = 0^+$.

$$E = Ri + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$$

De plus, la loi d'Ohm sur la résistance parcourue par le courant i_1 donne immédiatement $\boxed{i_1(0^+) = 0}$.

Une loi des nœuds donne finalement : $\boxed{i_2(0^+) = \frac{E}{R}}$.

2) Notons 1 le premier condensateur (horizontal) et 2 le second (vertical).

On atteint un nouveau régime permanant. Les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. Ainsi :

$$i(\mathrm{T}^-) = i_1(\mathrm{T}^-) = i_2(\mathrm{T}^-) = 0$$

La loi d'Ohm sur la résistance parcourue par le courant i_1 donne immédiatement $\boxed{u_{c2}(\mathrm{T}^-) = 0}$.

Appliquons une loi des mailles en $t = \mathrm{T}^-$.

$$E = 0 + u_{c1} + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{c1}(\mathrm{T}^-) = E}$$

Par continuité de la tension aux bornes des condensateurs :

$$\boxed{u_{c2}(\mathrm{T}^+) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{u_{c1}(\mathrm{T}^+) = E}$$

Appliquons une loi des mailles en $t = \mathrm{T}^+$.

$$0 = Ri + 0 + \mathrm{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(\mathrm{T}^+) = -\frac{E}{R}}$$

De plus, la loi d'Ohm sur la résistance parcourue par le courant i_1 donne immédiatement $\boxed{i_1(\mathrm{T}^+) = 0}$.

Une loi des nœuds donne finalement : $\boxed{i_2(\mathrm{T}^+) = -\frac{E}{R}}$.

On atteint un nouveau régime permanant lorsque $t = +\infty$. Les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. Ainsi :

$$\boxed{i(+\infty) = i_1(+\infty) = i_2(+\infty) = 0}$$

Exercice n°4 - Circuit RL en dérivation ★★☆

1) On a :

$$\boxed{s = \mathrm{R}i_R = L\frac{di_L}{dt}}$$

2) En $t = 0^-$, un régime permanant est atteint. La bobine est équivalente à un fil électrique : $s(0^-) = 0$. La loi d'Ohm donne : $\boxed{i_R(0^-) = 0}$. La loi des nœuds donne : $\boxed{i_r(0^-) = i_L(0^-) = 0}$.

3) L'intensité à travers une bobine se conserve : $\boxed{i_L(0^+) = 0}$.

La loi des nœuds donne :

$$i_r = i_L + i_R$$

De plus, la loi des mailles donne :

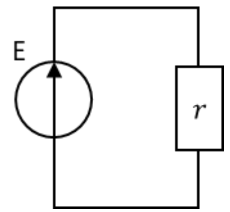
$$E = r\, i_r + R\, i_R$$

On en déduit :

$$\boxed{i_r(0^+) = i_R(0^+) = \frac{\mathrm{E}}{r + R}}$$

4) La bobine est équivalente à un fil électrique : $s(+\infty) = 0$.

Le circuit équivalent est :



La loi d'Ohm donne : $\boxed{i_R(+\infty) = 0}$. La loi des nœuds et la loi des mailles donnent :

$$\boxed{i_r(+\infty) = i_L(+\infty) = \frac{E}{r}}$$

5) La loi des mailles donne :

$$E = r\, i_r + s = r(i_R + i_L) + s = r\left(\frac{s}{R} + i_L\right) + s$$

On dérive l'expression :

$$0 = r\left(\frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{di_L}{dt}\right) + \frac{\mathrm{d}s}{dt} = r\left(\frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{s}{L}\right) + \frac{\mathrm{d}s}{dt}$$

On en déduit :

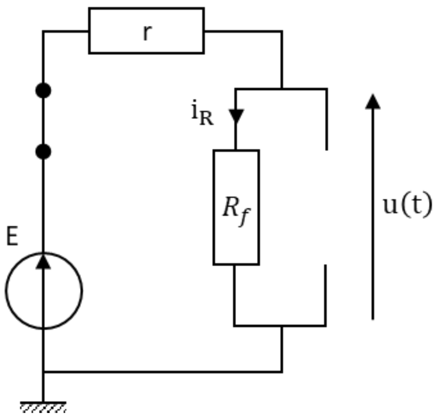
$$\frac{\mathrm{d}s}{dt}\left(\frac{r}{R}+1\right) + \frac{r}{L}s(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{ds}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = 0}$$

Exercice n°5 - Étude d'un condensateur réel ★★☆

1) On a :

$$\boxed{u = R_f i_R} \qquad \boxed{i_C = C\frac{du}{dt}}$$

2) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert. Le circuit équivalent est donc :



3) Le résultat est immédiat :

$$\boxed{u = E\frac{R_f}{r+R_f}}$$

4) Lorsque l'interrupteur est ouvert, la loi des nœuds donne :

$$0 = i_R + i_C = \frac{u}{R_f} + C\frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_f C} = 0}$$

La solution est :

$$\boxed{u(t) = E\frac{R_f}{r+R_f}\; e^{-t/R_f C}}$$

5) D'après l'énoncé, la tension $u(t)$ chute de 10 % en un temps T. Cela signifie que :

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\cdot E\frac{R_f}{r+R_f} = E\frac{R_f}{r+R_f}\; e^{-T/R_f C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = R_f C \ln\left(\frac{10}{9}\right)}$$

Exercice n°6 - Circuits du premier ordre à 2 mailles ★★★

1) Lorsque $t \to +\infty$, la bobine est équivalente à un fil électrique. Le circuit est donc équivalent à une résistance uniquement de valeur :

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 \parallel R_3 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}}$$

On en déduit immédiatement (loi d'Ohm) :

$$\boxed{i_1(+\infty) = \frac{E}{R_{eq}}}$$

On obtient i_2 et i_3 à l'aide d'un pont diviseur de courant.

$$\boxed{i_2(+\infty) = \frac{\mathrm{R}_3}{R_2+R_3}i_1(+\infty)} \quad \text{et} \quad \boxed{i_3(+\infty) = \frac{\mathrm{R}_2}{R_2+R_3}i_1(+\infty)}$$

2) Notons u_{R_2} la tension aux bornes de la résistance R_2. Exprimons cette tension de trois manières, en exploitant les 3 mailles.

$$u_{R_2} = \boxed{i_2 R_2 = i_3 R_3 + L\frac{di_3}{dt} = E - R_1 i_1}$$

De plus, la loi des nœuds donne : $\boxed{i_1 = i_2 + i_3}$

On a donc 3 équations avec 3 inconnues (i_1, i_2 et i_3). Cherchons l'ED vérifiée par $i_3(t)$, puisque l'on connait la condition initiale : $i_3(0^+) = 0$ par continuité de l'intensité à travers une bobine.

$$\begin{aligned}
i_3 R_3 + L\frac{di_3}{dt} &= E - R_1 i_1 \\
&= E - R_1(i_2 + i_3) && \leftarrow \quad i_1 = i_2 + i_3 \\
&= E - R_1\left(i_3\frac{\mathrm{R}_3}{\mathrm{R}_2} + \frac{L}{R_2}\frac{di_3}{dt} + i_3\right) && \leftarrow \quad i_2 = i_3\frac{\mathrm{R}_3}{\mathrm{R}_2} + \frac{L}{R_2}\frac{di_3}{dt}
\end{aligned}$$

On divise par R_1On rassemble les termes.

$$L\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{di_3}{dt}+R_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)i_3=\frac{E}{R_1}$$

On reconnait : $\frac{1}{R_0}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Ainsi :

$$\frac{L}{R_0}\frac{di_3}{dt}+\left(1+\frac{R_3}{R_0}\right)i_3=\frac{E}{R_1}$$

On met l'ED sous forme canonique en divisant par $\frac{L}{R_0}$.

$$\frac{di_3}{dt}+\frac{R_0+R_3}{L}i_3=\frac{R_0}{R_1L}\,E \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{di_3}{dt}+\frac{i_3}{\tau}=\frac{R_0}{R_1L}\,E=\frac{i_3(+\infty)}{\tau}}$$

<u>Remarque</u> :
À l'aide de la forme canonique, on sait que :

$$\frac{i_3(+\infty)}{\tau}=\frac{R_0}{R_1L}\,E \quad\Rightarrow\quad \boxed{i_3(+\infty)=\frac{R_0}{R_1(R_0+R_3)}\,E}$$

Ce qui est une expression plus simple que celle obtenue à la question précédente.
On en déduit la solution de l'ED :

$$\boxed{i_3(t)=\frac{R_0}{R_1(R_0+R_3)}\,E\cdot\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

On obtient ensuite $i_2(t)$ à l'aide de l'expression de $u_{R_2}(t)$.
Ainsi :

$$i_2(t)=i_3\frac{R_3}{R_2}+\frac{L}{R_2}\frac{di_3}{dt}=\frac{R_0R_3}{R_1R_2(R_0+R_3)}\,E\cdot\left(1-e^{-t/\tau}\right)+\frac{R_0}{R_1R_2}\,E\cdot e^{-t/\tau}$$

Soit,

$$\boxed{i_2(t)=\frac{R_0^2}{R_1R_2(R_0+R_3)}E\cdot e^{-t/\tau}+\frac{R_0R_3}{R_1R_2(R_0+R_3)}\,E}$$

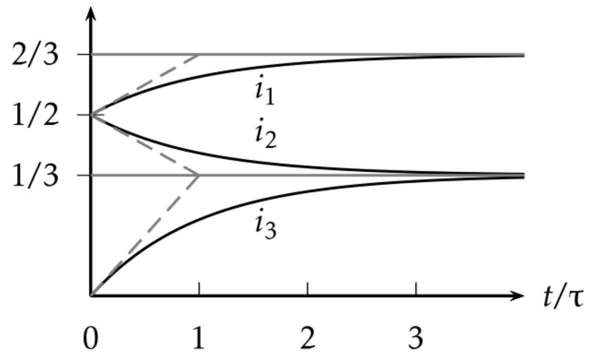
Enfin, on obtient $i_1(t)$ avec la loi de nœuds :

$$\boxed{i_1(t)=i_2(t)+i_3(t)=\frac{R_0(R_0-R_2)}{R_1R_2(R_0+R_3)}E\cdot e^{-t/\tau}+\frac{R_0(R_2+R_3)}{R_1R_2(R_0+R_3)}\,E}$$

3) Dans le cas où $R_1=R_2=R_3=R$, on en déduit que $R_0=\frac{R}{2}$. Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} i_3(t) &= \frac{E}{3R}\cdot\left(1-e^{-t/\tau}\right)\\ i_2(t) &= \frac{E}{6R}\cdot e^{-t/\tau}+\frac{E}{3R}=\frac{E}{3R}\cdot\left(1+\frac{1}{2}e^{-t/\tau}\right)\\ i_1(t) &= i_2(t)+i_3(t)=\frac{E}{3R}\cdot\left(2-\frac{1}{2}e^{-t/\tau}\right)\end{aligned}}$$

On obtient :



4) L'énergie emmagasinée dans la bobine à l'issue de la charge vaut :

$$\boxed{\mathcal{E}_{mag}=\frac{1}{2}L[i_3(+\infty)]^2=\frac{1}{2}L\left(\frac{R_0}{R_1(R_0+R_3)}\,E\right)^2}$$

Exercice n°7 - Étincelle de rupture ★★☆

1) En $t=0^-$, la résistance R est court-circuitée et la bobine est équivalente à un fil électrique. La loi des mailles donne donc :

$$E=0+0+u_r \quad\Rightarrow\quad \boxed{i(0^-)=\frac{E}{r}}$$

L'intensité i à travers la bobine est continue en $t=0$. Donc :

$$\boxed{i(0^+)=\frac{E}{r}}$$

2) Une fois l'interrupteur ouvert, les deux résistances sont en série. On pose donc :

$$\boxed{R_{eq}=R+r}$$

3) La loi des mailles donne :

$$E = R_{eq} i + u_L = R_{eq} i + L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R_{eq}}}$$

4) La solution est :

$$i = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{L}\tau = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R_{eq}}$$

Conditions initiales :

$$i(0^+) = \frac{E}{r} = \mathrm{A} + \frac{E}{R_{eq}} \quad \Rightarrow \quad A = E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{eq}}\right)$$

Ainsi, après simplification :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R_{eq}}\left[1 + \frac{R}{r}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]}$$

5) Lorsque l'interrupteur est fermé : $\boxed{u_K(t<0) = 0}$.

Lorsque l'interrupteur est ouvert, la loi des mailles donne :

$$E = u_K + u_L + ri \quad \Rightarrow \quad u_K = E - L\frac{di}{dt} - ri$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} u_K &= E - \frac{LE}{R_{eq}}\cdot\left(-\frac{R}{r\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) - \frac{rE}{R_{eq}}\left[1 + \frac{R}{r}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right] \\ &= E + \frac{R}{r}E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{rE}{R_{eq}}\left[1 + \frac{R}{r}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right] \\ &= E\left[\left(1 - \frac{r}{R_{eq}}\right) + \frac{R}{r}\left(1 - \frac{r}{R_{eq}}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}\right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{u_K(t>0) = E\frac{R}{R_{eq}}\left[1 + \frac{R}{r}\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]}$$

En particulier,

$$\boxed{u_K(0^+) = \mathrm{E}\frac{R}{r} = R\,i(0^+)}$$

Dans le cas où $R \gg r$, on a $u_K(0^+) \to +\infty$.

6) AN :

$$\boxed{u_K(0^+) = 40\ \mathrm{kV}}$$

Cette valeur est comparable à celle des lignes haute tension. On va observer en pratique un arc électrique lors de l'ouverture.

Exercice n°8 - Lampe à décharge ★★★

1) On suppose que la lampe est éteinte. Tout se passe donc comme si la lampe n'existe pas (résistance infinie). On se retrouve dans le cas du circuit RC du cours.

$$\boxed{\frac{dU_d}{dt} + \frac{U_d}{\tau_1} = \frac{E}{\tau_1}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau_1 = rC}$$

2) Lorsque la lampe est éteinte, U_d est régit par l'ED ci-dessus. La solution est donnée par : $U_d = E\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)$

La lampe s'allume uniquement si $U_d > U_a$. Il faut donc que $\boxed{E > U_a}$.

Le temps d'allumage vaut alors :

$$U_a = E\left(1 - e^{-T_a/\tau_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_a = \tau_1 \cdot \ln\left(\frac{E}{E - U_a}\right)}$$

3) On suppose que la lampe est allumée. La loi des mailles donne :

$$E = ri + U_d = r(i_c + i_d) + U_d = r\left(C\frac{dU_d}{dt} + \frac{U_d}{R_d}\right) + U_d$$

On en déduit :

$$\frac{dU_d}{dt}\cdot rC + U_d\left(1 + \frac{r}{R_d}\right) = E$$

Donc :

$$\boxed{\frac{dU_d}{dt} + \frac{U_d}{\tau_2} = \frac{E}{\tau_1}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau_2 = \frac{rC}{1 + \frac{r}{R_d}}}$$

4) On pose $t = 0$ le temps où la lampe s'éteint. La solution de l'ED est :

$$U_d = A\,e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1}E$$

CI :

$$U_a = A + \frac{\tau_2}{\tau_1} E \quad \Rightarrow \quad A = U_a - \frac{\tau_2}{\tau_1} E$$

Ainsi :

$$\boxed{U_d = \left(U_a - \frac{\tau_2}{\tau_1} E\right) e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1} E}$$

La lampe s'éteint si $U_d = U_e$. Cela se produit au temps :

$$U_e = \left(U_a - \frac{\tau_2}{\tau_1} E\right) e^{-T_e/\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1} E \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_e = \tau_2 \cdot \ln\left(\frac{U_a - \frac{\tau_2}{\tau_1} E}{U_e - \frac{\tau_2}{\tau_1} E}\right)}$$

Ensuite, on repart sur la première ED. La tension U_d augmente, ce qui va inévitablement allumer la lampe. On retombe alors dans la deuxième ED, etc. On obtient une succession de flashs lumineux.