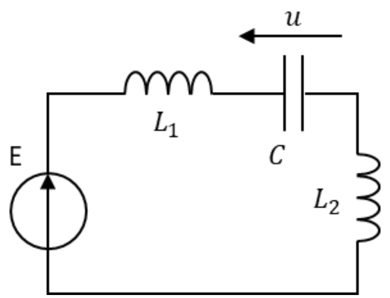
Électrocinétique | Chapitre 3 | TD (E3)

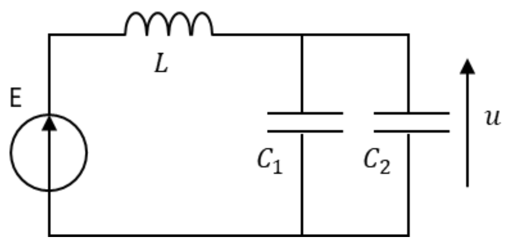
Exercice n°1 - Oscillateurs harmoniques ★☆☆

Pour chacun des circuits ci-dessous, montrer que $u(t)$ est solution d'une équation différentielle d'un oscillateur harmonique et déterminer l'expression de ω_0 en fonction des données du problème.

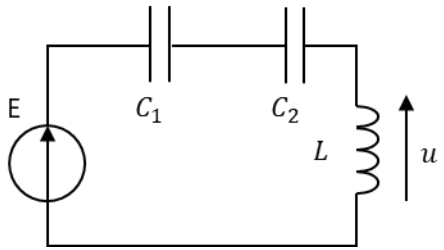
1)



2)



3)



Exercice n°2 - Conditions initiales ★☆☆

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{f}(t) + \omega_0^2\, f(t) = \omega_0^2\, f_{eq}$$

On suppose que, à l'instant $t = 0^+$, $f(t) = a_0$ et $\dot{f}(t) = b_0$.

1) Déterminer l'expression complète de $f(t)$, en utilisant la forme « $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ ».

2) Même question avec la forme « $F_m\cos(\omega_0 t + \phi)$ ».

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{f}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{f}(\mathrm{t}) + \omega_0^2\, f(t) = \omega_0^2\, f_{eq}$$

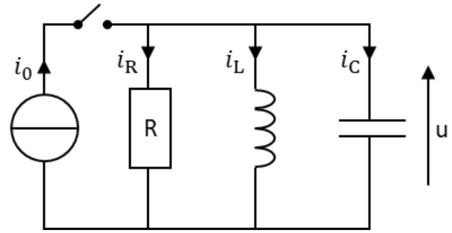
On suppose que, à l'instant $t = 0^+$, $f(t) = a_0$ et $\dot{f}(t) = b_0$.

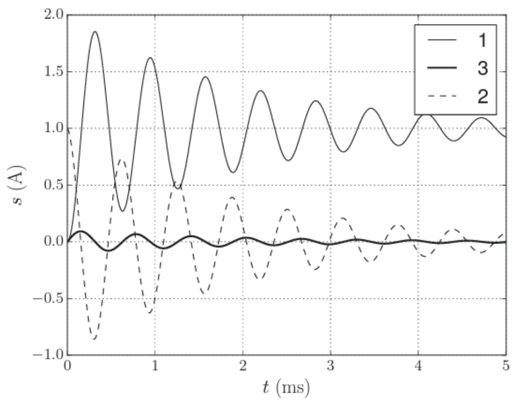
3) Déterminer l'expression complète de $f(t)$ si $Q = 10$.

4) Même question si $Q = 0{,}1$.

Exercice n°3 - Circuit R ∥ L ∥ C ★★☆

On dispose du circuit RLC parallèle ci-dessous, alimenté par un générateur parfait de courant i_0. Le condensateur de capacité C est déchargé pour $t < 0$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, alimentant ainsi le circuit par un échelon de courant d'intensité $i_0 = 1{,}0$ A. On donne $\mathrm{R} = 1{,}0 \cdot 10^4\ \Omega$ et $\mathrm{L} = 0{,}10$ H.





La figure ci-contre représente l'évolution des trois courants i_R, i_L et i_C en fonction du temps.

1) Déterminer les valeurs des intensités en $t = 0^+$ et lorsque $t \to +\infty$. Associer ainsi les trois courbes 1, 2, 3 aux différents courants.

2) Établir l'équation différentielle satisfaite par i_L.

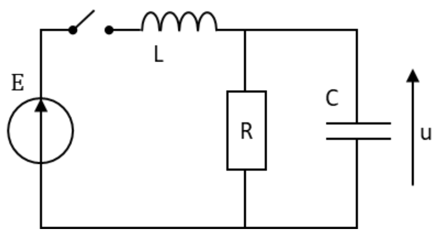
3) Donner, en fonction de R, L et C, l'expression du facteur de qualité. Estimer graphiquement Q. En déduire que la pseudo-pulsation Ω s'identifie à la pulsation propre ω_0.

4) Déterminer la valeur de la capacité C du condensateur.

Exercice n°4 - Circuit L(R ∥ C) ★⯪☆

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension dans le circuit ci-contre.

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule dans le circuit. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



On donne : $R = 100\ \Omega$; $C = 1{,}0\ nF$; $L = 1{,}0\ mH$.

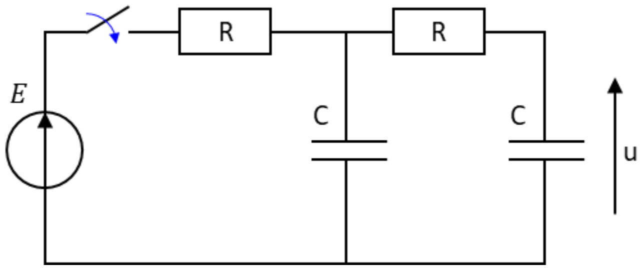
1) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ et l'écrire sous forme canonique en identifiant les expressions de ω_0 et Q.

2) Établir les valeurs de $u(0^+)$ et $\dot{u}(0^+)$.

3) Au-delà de quelle résistance, aura-t-on un régime pseudo-périodique ?

Exercice n°5 - Circuit avec deux condensateurs ★★☆

Le circuit ci-dessous comporte deux résistances R et deux condensateurs de capacité C, initialement déchargés. À l'instant $t = 0$ on connecte un générateur de tension E.



1) Déterminer la tension u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ en régime permanent.

2) On pose $\tau = RC$, montrer que la tension $u(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{E}{\tau^2} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau^2}$$

3) Quel est le facteur de qualité Q du montage ?

4) Déterminer les conditions initiales.

5) Déterminer $u(t)$. La dessiner.

Éléments de réponse

❶ 1) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C(L_1+L_2)}}$. 2) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}$. 3) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}}$. ❷ 1) $A = a_0 - f_{eq}$ et $B = \frac{b_0}{\omega_0}$. 2) $F_m = \sqrt{\left(a_0 - f_{eq}\right)^2 + \left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2}$ et $\phi = \arctan\left(\frac{-b_0/\omega_0}{a_0 - f_{eq}}\right)$. 3) $A = a_0 - f_{eq}$ et $B = \frac{b_0 + \lambda(a_0 - f_{eq})}{\omega_0}$. 4) $A = a_0 - f_{eq}$ et $B = \frac{b_0 - \lambda(a_0 - f_{eq})}{\omega_0}$. ❸ 1) $i_L \to 1$, $i_C \to 2$ t $i_R \to 3$. 2) $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} i_0$. 3) $\mathrm{C} \simeq 1$ nF. 4) $\mathrm{C} \simeq 4$ nF. ❹ 1) $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{E}{LC}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$. 2) $u(0^+) = 0$ et $\dot{u}(0^+) = 0$. 3) $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$. ❺ 1) $u_\infty = E$. 3) $Q = 1/3$. 4) $u(0^+) = 0$ et $\frac{du}{dt}(0^+) = 0$. 5) $u(t) = E\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\mathrm{ch}(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\mathrm{sh}(\Omega t)\right)\right]$.