Électrocinétique | Chapitre 3 | Correction TD (E3)

Exercice n°1 - Oscillateurs harmoniques ★☆☆

1) Loi des mailles :

$$E = u_{L_1} + u_{L_2} + u = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + u$$

Or, $i = C\frac{du}{dt}$. Ainsi,

$$E = C(L_1 + L_2)\frac{d^2u}{dt^2} + u(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{u}(t) + \omega_0^2\, u(t) = \omega_0^2\, E}$$

Avec :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}}}$$

2) Loi des mailles :

$$E = u_L + u = L\frac{di}{dt} + u$$

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$. Ainsi :

$$E = L\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} + u = LC_1\frac{d^2u}{dt^2} + LC_2\frac{d^2u}{dt^2} + u(t)$$

Ainsi,

$$\boxed{\ddot{u}(t) + \omega_0^2\, u(t) = \omega_0^2\, E} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}}$$

3) Loi des mailles :

$$E = u_{C_1} + u_{C_2} + u$$

Dérivons 2 fois cette expression :

$$0 = \frac{d^2u_{C_1}}{dt^2} + \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{i}{C_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{i}{C_2}\right) + \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u(t)}{LC_1} + \frac{u(t)}{LC_2} + \frac{d^2u}{dt^2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\ddot{u}(t) + \omega_0^2\, u(t) = 0} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}}}$$

Exercice n°2 - Conditions initiales ★☆☆

1) La solution de l'ED vaut :

$$f(t) = f_{eq} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On utilise les conditions initiales.

$$f(0^+) = f_{eq} + A = a_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = a_0 - f_{eq}}$$

De plus,

$$\dot{f}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

Donc :

$$\dot{f}(0^+) = b_0 = B\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{b_0}{\omega_0}}$$

On en déduit :

$$\boxed{f(t) = f_{eq} + \left(a_0 - f_{eq}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{b_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

2) La solution de l'ED vaut :

$$f(t) = f_{eq} + F_m\cos(\omega_0 t + \phi)$$

On utilise les conditions initiales.

$$f(0^+) = f_{eq} + F_m\cos(\phi) = a_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_m\cos(\phi) = a_0 - f_{eq}}$$

De plus, $\dot{f}(t) = -F_m\omega_0\ \sin(\omega_0 t + \phi)$

Donc :

$$\dot{f}(0^+) = b_0 = -F_m\omega_0\ \sin(\phi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_m\sin(\phi) = -\frac{b_0}{\omega_0}}$$

On a obtenu deux équations à deux inconnus. On peut donc séparer les variables. Faisons la somme des carrés et prenons la racine :

$$\sqrt{(F_m\cos(\phi))^2 + (F_m\sin(\phi))^2} = \boxed{F_m = \sqrt{\left(a_0 - f_{eq}\right)^2 + \left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2}}$$

Faisons le rapport et prenons l'arctangente :

$$\arctan\left(\frac{F_m\sin(\phi)}{F_m\cos(\phi)}\right) = \boxed{\phi = \arctan\left(\frac{-b_0/\omega_0}{a_0 - f_{eq}}\right)}$$

On en déduit :

$$\boxed{f(t) = f_{eq} + \sqrt{\left(a_0 - f_{eq}\right)^2 + \left(\frac{b_0}{\omega_0}\right)^2} \cos\left(\omega_0 t + \arctan\left(\frac{-b_0/\omega_0}{a_0 - f_{eq}}\right)\right)}$$

3) On pose $\boxed{\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}}$ et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{\left|\frac{1}{4Q^2} - 1\right|}}$.

On est en régime pseudo-périodique. La solution s'écrit :

$$f(t) = f_{eq} + e^{-\lambda t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

On utilise les conditions initiales.

$$f(0^+) = f_{eq} + A = a_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = a_0 - f_{eq}}$$

De plus,

$$\dot{f}(t) = -\lambda\, e^{-\lambda t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] + \Omega\, e^{-\lambda t}[-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)]$$

Donc :

$$\dot{f}(0^+) = b_0 = -\lambda A + \Omega B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{b_0 + \lambda\left(a_0 - f_{eq}\right)}{\omega_0}}$$

On en déduit :

$$\boxed{f(t) = f_{eq} + e^{-\lambda t}\left[\left(a_0 - f_{eq}\right)\cos(\Omega t) + \frac{b_0 + \lambda\left(a_0 - f_{eq}\right)}{\omega_0}\sin(\Omega t)\right]}$$

4) On est en régime apériodique. La solution s'écrit :

$$f(t) = f_{eq} + e^{-\lambda t}[A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)]$$

On utilise les conditions initiales.

$$f(0^+) = f_{eq} + A = a_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = a_0 - f_{eq}}$$

De plus,

$$\dot{f}(t) = -\lambda\, e^{-\lambda t}[A\,\mathrm{sh}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)] + \Omega\, e^{-\lambda t}[A\,\mathrm{sh}(\Omega t) + B\,\mathrm{ch}(\Omega t)]$$

Donc :

$$\dot{f}(0^+) = b_0 = \lambda A + \Omega B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{b_0 - \lambda\left(a_0 - f_{eq}\right)}{\omega_0}}$$

On en déduit :

$$\boxed{f(t) = f_{eq} + e^{-\lambda t}\left[\left(a_0 - f_{eq}\right)\mathrm{ch}(\Omega t) + \frac{b_0 - \lambda\left(a_0 - f_{eq}\right)}{\omega_0}\mathrm{sh}(\Omega t)\right]}$$

Exercice n°3 - Circuit R ∥ L ∥ C ★★☆

1) En régime permanant, la bobine est équivalente à un fil électrique. Elle va donc court-circuiter les deux autres composants : l'intégralité de l'intensité passe par sa branche. On en déduit que i_L est la courbe (1).

La tension aux bornes du condensateur u (qui est la même que celle aux bornes de la résistance) est continue. Or, $u = R\, i_R$, donc i_R est également continue en $t = 0$. Il s'agit donc de la courbe (3).

Finalement, $\mathrm{i_C}$ est la courbe (2).

2) Loi des nœuds :

$$i_0 = i_R + i_C + i_L$$

De plus, la loi des mailles donne :

$$u = Ri_R = L\frac{di_L}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{dt} = \frac{i_C}{C} = R\frac{di_R}{dt} = L\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

On combine les deux lois :

$$i_0 = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L$$

On met l'ED sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{1}{LC}i_0}$$

3) La valeur de C va jouer sur le facteur de qualité. Or on sait que la valeur de Q est du même ordre de grandeur que le nombre d'oscillations visibles.

Faisons apparaitre le facteur de qualité :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \frac{1}{LC}i_0$$

On en déduit :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \Rightarrow \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

La pulsation des oscillations vaut : :

$$\Omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(1-\frac{R^2C}{4L}\right)} = \sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

On en déduit :

$$C = \frac{1}{L}\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2+\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right)^{-1}$$

Graphiquement, on peut lire que $8\mathrm{T} \simeq 5\ \mathrm{ms}$. Donc : $\mathrm{T} \simeq 0{,}625\ \mathrm{ms}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{C} \simeq 4\ \mathrm{nF}}$$

Exercice n°4 - Circuit $\mathrm{L}(\mathrm{R} \parallel \mathrm{C})$ ★★☆

1) Loi des mailles : $\mathrm{E} = \mathrm{u_L} + \mathrm{u}$

Loi des nœuds : $\mathrm{i_L} = \mathrm{i_R} + \mathrm{i_C}$

On dérive cette expression :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{di_L}}{\mathrm{dt}}}_{\mathrm{u_L/L}} = \underbrace{\frac{\mathrm{di_R}}{\mathrm{dt}}}_{\mathrm{\dot{u}/R}} + \underbrace{\frac{\mathrm{di_C}}{\mathrm{dt}}}_{\mathrm{C\,\ddot{u}}}$$

Ainsi :

$$\frac{\mathrm{E}-\mathrm{u}}{\mathrm{L}} = \frac{\dot{\mathrm{u}}}{\mathrm{R}} + \mathrm{C}\,\ddot{\mathrm{u}}$$

On met l'ED sous forme canonique :

$$\ddot{\mathrm{u}} + \frac{1}{\mathrm{RC}}\,\dot{\mathrm{u}} + \frac{1}{\mathrm{LC}}\,\mathrm{u} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{LC}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\mathrm{u}} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\,\dot{\mathrm{u}} + \omega_0^2\,\mathrm{u} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{LC}}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}} = \frac{1}{\mathrm{RC}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Q} = \mathrm{R}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}}}$$

2) La tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc u est continue :

$$\mathrm{u}(0^-) = \boxed{\mathrm{u}(0^+) = 0}$$

Ceci implique que $\mathrm{i_R}(0^+) = 0$ d'après la loi d'Ohm.

L'intensité à travers une bobine est continue :

$$\mathrm{i_L}(0^-) = \mathrm{i_L}(0^+) = 0$$

Or,

$$\mathrm{i_L} = \mathrm{i_R} + \mathrm{i_C} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{i_C}(0^+) = \mathrm{C}\,\dot{\mathrm{u}}(0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\mathrm{u}}(0^+) = 0}$$

3) On est dans un régime pseudo-périodique si le signe du discriminent du polynôme caractéristique est négatif.

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Q} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{R}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}} > \frac{1}{2}$$

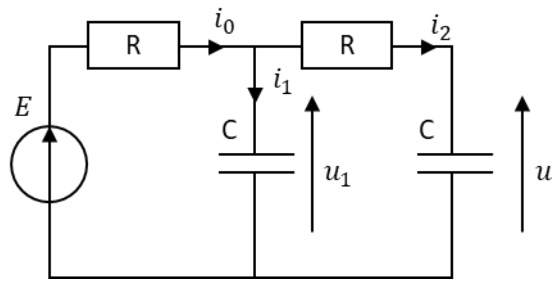
$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{R} > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}}}$$

Exercice n°5 - Circuit avec deux condensateurs ★★☆

1) Les deux condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. Donc $i(\infty) = 0$, donc $u_R(\infty) = 0$. La loi des mailles donne donc :

$$\boxed{u(\infty) = u_\infty = E}$$

2) On utilise les notations du montage ci-dessous.



Listons toutes les relations connues :

- Loi des mailles (gauche) : $E = Ri_0 + u_1$
- Loi des mailles (droite) : $u_1 = Ri_2 + u$
- Loi des nœuds : $i_0 = i_1 + i_2$
- Condensateurs : $i_1 = C\ du_1/dt$ et $i_2 = C\ du/dt$

Partons de la combinaison des deux lois des mailles :

$$\begin{aligned}
E &= Ri_0 + Ri_2 + u \\
&= R\left(C\frac{du_1}{dt} + C\frac{du}{dt}\right) + RC\frac{du}{dt} + u && \leftarrow \quad i_0 = i_1 + i_2 \ \text{ et } \ i_{1,2} = C\frac{du_{1,2}}{dt} \\
&= RC\left(\frac{d}{dt}(Ri_2 + u) + 2\frac{du}{dt}\right) + u && \leftarrow \quad u_1 = Ri_2 + u \\
&= RC\left(RC\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt}\right) + u && \leftarrow \quad i_2 = C\frac{du}{dt}
\end{aligned}$$

On obtient bien :

$$\boxed{\frac{E}{\tau^2} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau^2}}$$

3) Par définition, la forme canonique de l'ED est :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2\,u(t) = \frac{E}{\tau^2}$$

On en déduit : $\omega_0 = 1/\tau$ et $\boxed{Q = 1/3}$.

4) À $t = 0$, u et u_1 sont continus. On en déduit :

$$\boxed{u(0^+) = u_1(0^+) = 0}$$

Ainsi,

$$u_1 = Ri_2 + u \quad \Rightarrow \quad i_2(0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{du}{dt}(0^+) = 0}$$

5) On pose $\boxed{\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}}$ et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{\left|\frac{1}{4Q^2} - 1\right|}}$. On est en régime pseudo-périodique. La solution s'écrit :

$$u(t) = \mathrm{E} + e^{-\lambda t}[A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)]$$

On utilise les conditions initiales.

$$u(0^+) = \mathrm{E} + A = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -\mathrm{E}}$$

De plus,

$$\dot{u}(t) = -\lambda\, e^{-\lambda t}[A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)] + \Omega\, e^{-\lambda t}[A\,\mathrm{sh}(\Omega t) + B\,\mathrm{ch}(\Omega t)]$$

Donc :

$$\dot{u}(0^+) = 0 = -\lambda A + \Omega B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = -\frac{\lambda \mathrm{E}}{\Omega}}$$

On en déduit :

$$\boxed{u(t) = E\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\mathrm{ch}(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\mathrm{sh}(\Omega t)\right)\right]}$$