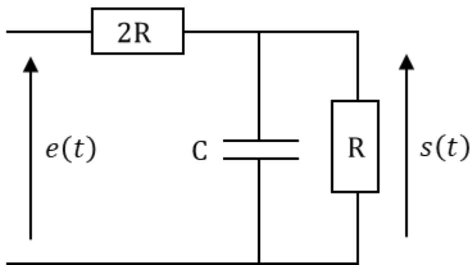
Électrocinétique | Chapitre 5 | TD (E5)

Exercice n°1 - Filtre $2R(C \parallel R)$ ★☆☆

On considère le filtre ci-dessous. On donne : $R = 1\ k\Omega$ et $C = 1\ \mu F$.



1) Déterminer, sans calcul, la nature du filtre.

2) Déterminer la fonction de transfert. La mettre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

Déterminer les expressions de H_0 et ω_0 en fonction de R et C.

3) Quel est l'ordre du filtre ?

4) Tracer son diagramme de Bode (asymptotique et réel).

5) Déterminer la/les fréquences de coupure et la bande passante.

On envoie en entrée le signal :

$$e(t) = U_0 + U_1 \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right) + U_1 \cos(\omega_2 t)$$

avec : $\omega_1 = 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et $\omega_2 = 1{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

6) Déterminer $s(t)$.

Exercice n°2 - Analyse spectrale ★★☆

On envoie le signal périodique représenté en figure 1 (u_e) sur un filtre du premier ordre. On y a représenté également la sortie du filtre (u_s).

1) Interpréter ces signaux comme une somme de deux sinusoïdes dont on précisera les amplitudes (A_1 et A_2 pour $u_e(t)$, B_1 et B_2 pour $u_s(t)$), les fréquences f_1 et f_2 et les phases à l'origine (ϕ_1 et ϕ_2 pour $u_e(t)$, ψ_1 et ψ_2 pour $u_s(t)$).

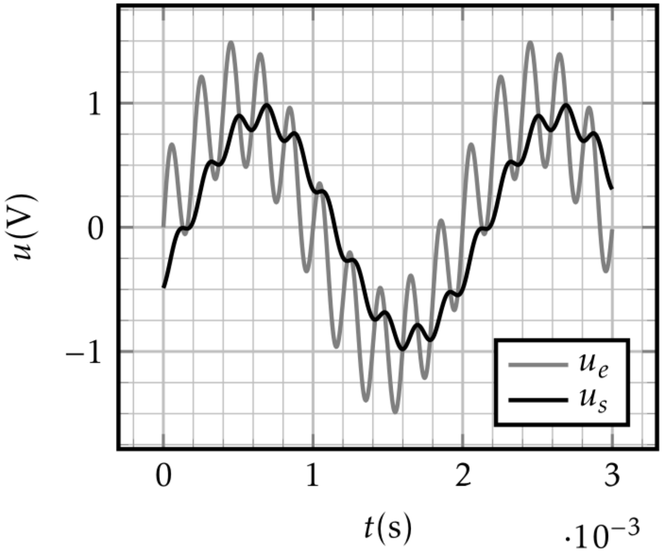


Figure 1

2) En déduire l'allure des spectres en amplitude de u_e et u_s. On utilisera une représentation semi-logarithmique pour représenter $20\log(\text{Amplitude})$ en fonction de la fréquence (comme sur la figure 2).

3) Identifier la nature du filtre. Vérifier l'accord avec les déphasages observés entre les composantes de l'entrée et de la sortie. Rappeler l'expression de la fonction de transfert et en déduire la fréquence de coupure.

On envoie un signal créneau (figure 3) sur un filtre dont le gain en dB est représenté sur la figure 4. Le spectre de Fourier du signal d'entrée u_e est représenté sur la figure 2.

Figure 2

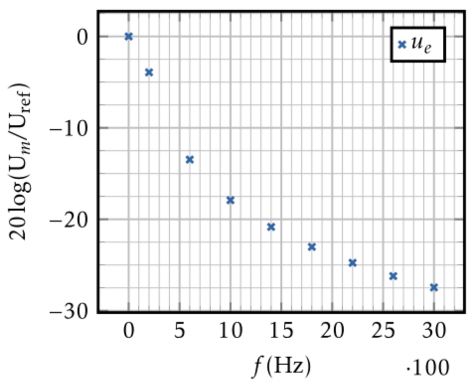
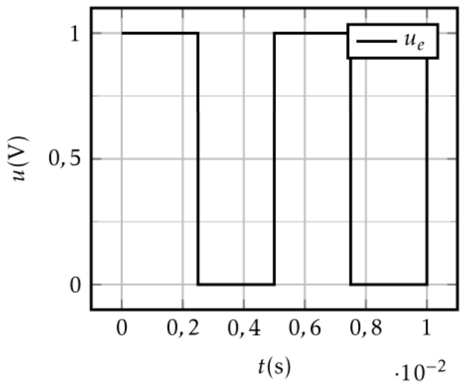
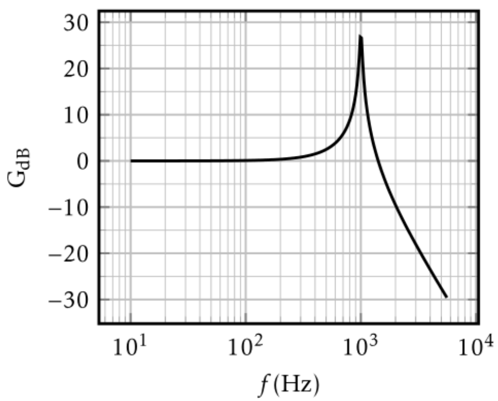


Figure 3



Remarque :
On a arbitrairement translaté l'axe des ordonnées pour que la composante prépondérante ait une valeur nulle en dB et on a éliminé du spectre les composantes de poids négligeable.

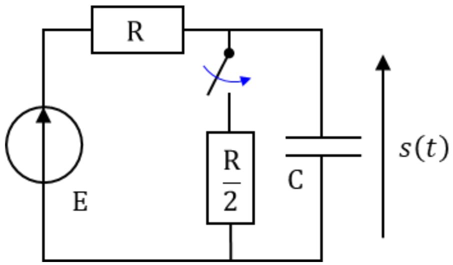
Figure 4



4) Quelle est la fréquence du signal carré ? Identifier les valeurs des fréquences des harmoniques. Que représente la composante de fréquence nulle ?
5) Utiliser le diagramme de Bode pour déterminer l'allure du spectre de Fourier du signal de sortie du filtre.

Exercice n°3 - Obtenir une ED grâce à la notation complexe ★☆☆

On considère le circuit ci-contre. Le générateur envoie un signal constant E. L'objectif est de déterminer l'ED vérifiée par $u(t)$ à partir du moment où l'on ferme l'interrupteur, en s'aidant de la notation complexe.



1) En utilisant la notation complexe, déterminer la relation entre $\underline{u}$ et $\underline{e}$. La mettre sous la forme :

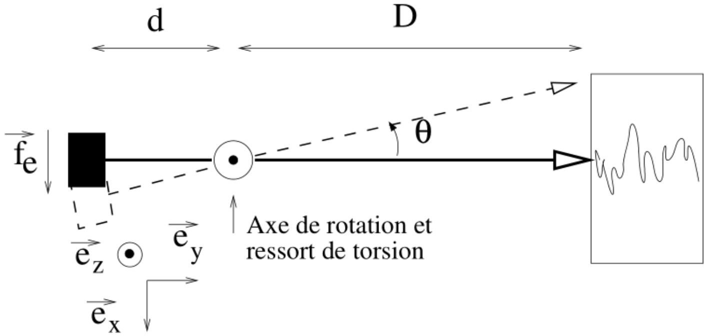
$$P(j\omega)\cdot\underline{u} = Q(j\omega)\cdot\underline{e}$$

où $P(j\omega)$ et $Q(j\omega)$ sont des polynômes en $j\omega$.

2) Repasser en notation réelle et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

Exercice n°4 - Sismomètre ★★☆

Pour enregistrer les vibrations du sol, les ingénieurs sismologues ont développé de nombreux dispositifs électromécaniques appelés sismomètres.



Le bras du sismomètre est assujetti à tourner dans le plan horizontal (x, y) autour d'un axe vertical solidaire du socle. La position du bras est repérée par un angle θ. On admet que cet angle est solution de l'équation différentielle :

$$md^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\,\theta(t) - \gamma\,\frac{d\theta}{dt} + d\,f_e(t)$$

où m est la masse du contre-poids, C une constante de rappel, γ un coefficient d'amortissement et $f_e(t)$ la force d'entrainement du sol sur le socle du sismomètre.

Un capteur enregistre un signal $s(t) = \alpha\,\dot{\theta}$ proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du bras, où α est une constante positive supposée connue.

1) Exprimer la fonction de transfert complexe $\underline{H}(\omega) = \underline{S}/\underline{F_e}$ obtenue au cours du régime sinusoïdal établi, où $\underline{S}$ et $\underline{F_e}$ sont les représentations complexes respectives des fonctions sinusoïdales $s(t)$ et $f_e(t)$.

Par analogie avec l'électrocinétique, on peut réécrire la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

en introduisant une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q. Exprimer les constantes A_0, ω_0 et Q en fonction des données du problème.

2) Quelle est la nature du filtre mécanique ainsi obtenu ?

3) Discuter, suivant la valeur de Q, l'allure du diagramme de Bode (amplitude et phase) de $\underline{H}(\omega)$.

4) Le signal excitateur $f_e(t)$ est brusquement coupé. Quels sont les différents régimes possibles présentés par le signal $s(t)$? Accompagner votre réponse de

schémas indiquant l'allure des courbes représentatives des différentes fonctions $s(t)$, après la coupure du signal excitateur.

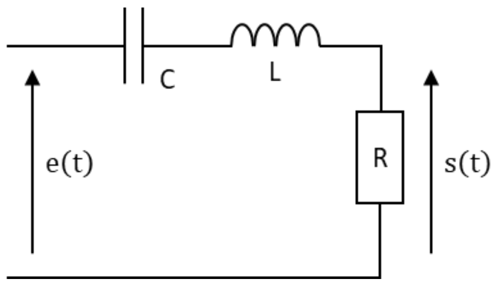
5) Pour un fonctionnement optimal, le détecteur doit retourner le plus rapidement à sa position d'équilibre lorsque le signal excitateur est coupé. Dans quel régime de la question précédente est-il préférable de se placer ?

Exercice n°5 - Cahier des charges ★★☆

Un microphone enregistre une conversation mais le rendu final est difficile audible du fait de la présence de bruits divers. Pour nettoyer l'enregistrement, on va prendre avantage du fait que l'audition humaine s'étend de $20\ Hz$ à $20\ kHz$, alors que la voix peut produire des sons de fréquences comprises entre $100\ Hz$ et $2\ kHz$.

On souhaite donc réaliser un filtre qui ne conserve que la gamme de fréquence couvert par la voix. Pour cela, on impose de conserver une atténuation inférieure à $10\ dB$ pour la voie humaine, tout en réduisant, à la limite de spectre audible, le niveau du signal de $40\ dB$.

On utilise le filtre ci-contre.



On rappelle qu'il s'agit d'un filtre passe-bande d'ordre 2 dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(x) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j\,Q\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec :} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

La bande passante à -3 dB de ce filtre est donnée par :

$$BP = \left[\frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 + \sqrt{1+4Q^2}\right) ; \frac{\omega_0}{2Q}\left(+1 + \sqrt{1+4Q^2}\right)\right]$$

1) Que vaut sa largeur ?

2) Que doit valoir la pulsation propre ω_0 pour centrer (en échelle log) la BP conformément au cahier des charges ?

3) Faut-il choisir un facteur de qualité faible ou élevé ? Déterminer la valeur à donner à Q pour ajuster la BP au spectre de la voix humaine.

4) Quelles devraient être les pentes des asymptotes à hautes et basses fréquences pour respecter le cahier des charges ? Est-ce le cas pour ce filtre ?

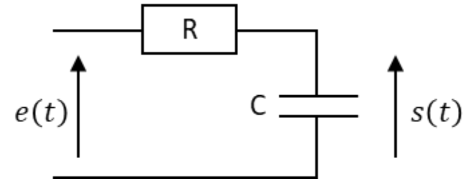
On dispose de plusieurs filtres RLC identiques à celui présenté ci-dessus.

5) Sans calculs, dire combien de filtres faut-il mettre en cascade pour obtenir un filtre conforme au cahier des charges ? Quel sera alors l'ordre du filtre ?

6) Quelle précaution faut-il prendre lors de la mise en cascade des filtres ?

Exercice n°6 - Impédance d'entrée de l'oscilloscope ★☆☆

On considère le filtre RC suivant. On choisit $R = 500\ \text{k}\Omega$ et $C = 100\ \mu\text{F}$.



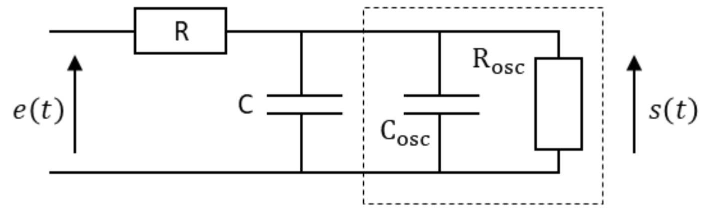
1) Montrer que sa fonction de transfert se met sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Préciser les expressions et les valeurs de H_0 et ω_0.

2) Représenter le diagramme de Bode en amplitude.

Un oscilloscope peut être modélisé par l'association en dérivation d'une résistance $R_{osc} = 1\ \text{M}\Omega$ et d'une capacité $C_{osc} = 30\ \text{pF}$.



3) Calculer la nouvelle fonction de transfert. La mettre sous la forme :

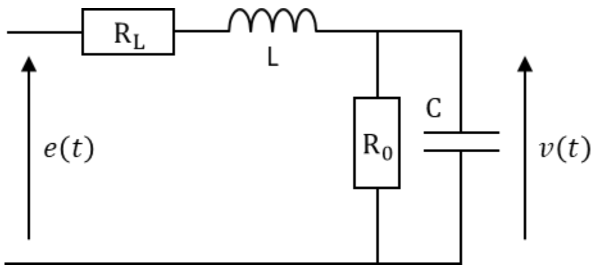
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

Déterminer la nouvelle pulsation de coupure ω_1. Conclure sur l'influence de l'oscilloscope.

Exercice n°7 - Réponse d'un microphone ★★☆

Le comportement électrique d'un microphone est donné ci-dessous. On appelle $\underline{H}(\omega) = \underline{v}/\underline{e}$ la fonction de transfert complexe du microphone.

1) Déterminer l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(\omega)$.



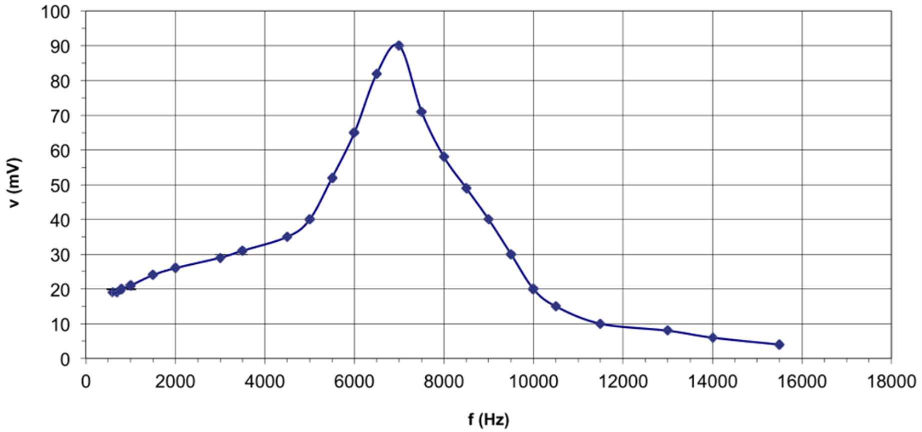
2) Écrire $\underline{H}(\omega)$ sous la forme canonique suivante et en déduire les expressions du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0.

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} \quad \text{avec :} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

3) Établir la condition d'existence d'une résonance et déterminer la pulsation de résonance en fonction du facteur de qualité et de la pulsation propre.

Dans la suite, on suppose que $Q \gg 1$.

La réponse expérimentale du microphone est donnée sur la figure ci-dessous.



4) Déterminer graphiquement la fréquence de résonance.

5) Rappeler la définition d'une pulsation de coupure à -3 dB. Déterminer graphiquement les fréquences de coupure.

6) En interprétant le facteur de qualité comme la surtension à la résonance, déterminer graphiquement la valeur du facteur de qualité.

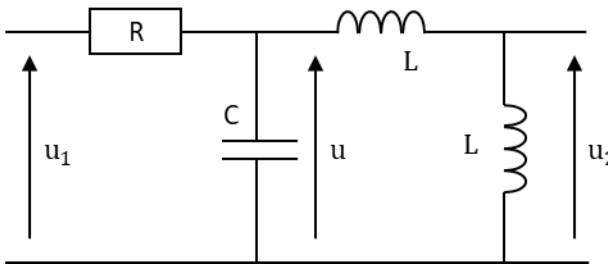
Exercice n°8 - Filtre de Hartley ★★★

On étudie le montage ci-dessous (en sortie ouverte). Dans tout l'exercice, on prendra :

$L = 1{,}0\ mH$

$C = 0{,}10\ \mu F$

$R = 3{,}1\ k\Omega$



1) Déterminer, sans calcul, la nature du filtre.

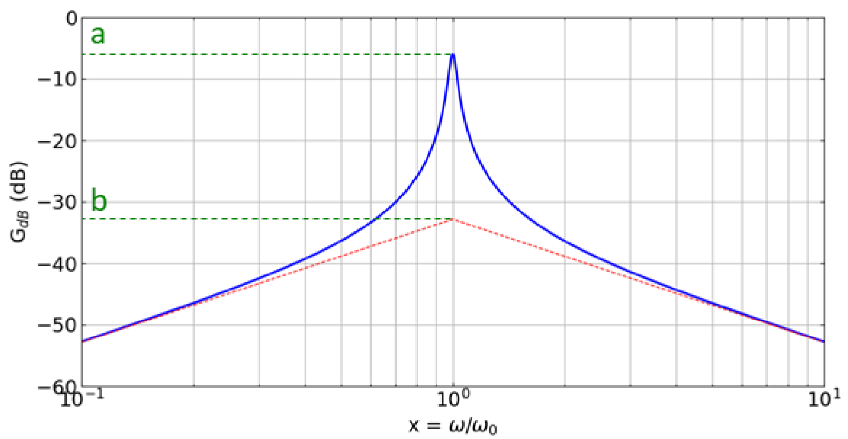
2) Exprimer $\underline{u_2}$ en fonction de $\underline{u}$, puis $\underline{u}$ en fonction de $\underline{u_1}$. En déduire que la fonction de transfert se met sous la forme canonique suivante :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = H_0 \frac{j\dfrac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} = \frac{H_0}{1 + j\,Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

En notant $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite.

Donner la valeur de H_0. On exprimera la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction de R, L et C, puis on donnera les valeurs numériques.

Le diagramme de Bode en amplitude est donné ci-dessous.



3) Mesurer les pentes des asymptotes. Retrouver leur valeur à partir de l'étude de la fonction de transfert.

4) Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour la phase.

5) Déterminer les valeurs numériques de a et b définis sur le diagramme à partir de l'expression de la fonction de transfert. Vérifier la cohérence avec les valeurs du graphe.

6) Ce quadripôle peut-il servir d'intégrateur ou de dérivateur ? Si oui, dans quelle bande de fréquences ? Justifier. Quel inconvénient présente néanmoins ce montage utilisé pour réaliser ces opérations ?

On étudie la sortie $u_2(t)$ lorsqu'on applique à l'entrée le signal suivant :

$$u_1(t) = E_0 + E_{1m}\cos(\omega_1 t) \quad \text{avec :} \quad \omega_1 = \omega_0$$

7) Déterminer l'expression littérale du signal de sortie $u_2(t)$.

On applique maintenant un créneau $c(t)$ de pulsation $\omega_2 = \omega_0/3$, d'amplitude $C_m = 1\ V$ et de valeur moyenne nulle.

Le signal créneau est décomposable en série de Fourier :

$$\mathrm{c}(t) = \frac{4C_m}{\pi}\left[\sin(\omega_2 t) - \frac{1}{3}\sin(3\omega_2 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_2 t) - \frac{1}{7}\sin(7\omega_2 t) + \cdots\right]$$

8) Tracer l'allure du spectre d'amplitude de $c(t)$. Préciser les valeurs numériques des pulsations des 3 premiers pics d'amplitudes non nulles.

9) En utilisant le diagramme de Bode fourni, calculer les valeurs numériques des amplitudes de ces pics dans le signal de sortie.

En déduire l'expression numérique approchée du signal de sortie. Justifier alors le nom donné à ce filtre : « tripleur de fréquences ».

Exercice n°9 - Étude d'une fonction de transfert ★★☆

On considère la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\tau_2}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_3)}$$

avec : $\tau_1 = 0{,}1\ s$, $\tau_2 = 1\ s$ et $\tau_3 = 10\ s$.

1) Écrire $\underline{H}(j\omega)$ comme le produit de trois fonctions de transfert élémentaires.

2) Tracer, sur un même graphe (un pour l'amplitude, un pour la phase), le diagramme de Bode asymptotique de ces trois filtres.

3) En déduire le diagramme de Bode, asymptotique puis réel, de $\underline{H}(j\omega)$.

Éléments de réponse

❶ 1) Passe-bas. 2) $\underline{\mathrm{H}} = \frac{1/3}{1+\mathrm{j}x}$, $\mathrm{H}_0 = 1/3$ et $\omega_0 = 3/2RC$. 3) Ordre 1. 5) $\omega_c = \frac{3}{2\mathrm{RC}}$. 6) $(\mathrm{t}) \simeq \frac{\mathrm{U}_0}{3} + \frac{U_1}{4{,}2}\cos(\omega_1 t)$. ❷ 1) $f_1 = 500\ \mathrm{Hz}$, $f_2 = 5\ k\mathrm{Hz}$, $A_1 = 1{,}0\ \mathrm{V}$, $A_2 = 0{,}5\ \mathrm{V}$, $\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$, $B_1 = 0{,}9\ \mathrm{V}$, $B_2 = 0{,}1\ \mathrm{V}$, $\psi_1 \simeq -\frac{\pi}{2} - 0{,}14\,\pi$ et $\psi_2 \simeq -\frac{\pi}{2} - 0{,}4\,\pi$. 3) Passe-bas avec $f_c = 1150\ \mathrm{Hz}$. 4) Fondamental : $f_1 = 200\ \mathrm{Hz}$. Harmoniques : $f_n = (2n+1)f_1$. Composante continue. 5) En décibel : sortie = entrée + $\mathrm{G_{dB}}$. ❸ 1) $\underline{\mathrm{s}}\,(3 + \mathrm{j}\omega\mathrm{RC}) = \underline{\mathrm{e}}$. 2) $RC\frac{ds}{dt} + 3\,s(t) = e(t)$. ❹ 1) $A_0 = \frac{\alpha d}{\gamma}$, $Q = \frac{1}{\gamma}\sqrt{md^2C}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{md^2}}$. 2) Passe bas ordre 2. 4) Voir cours oscillateurs amortis. 5) Critique. ❺ 1) $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. 2) $\omega_0 = 447\ \mathrm{Hz}$. 3) $Q = 0{,}24$. 4) $p_{BF} = +60\ \mathrm{dB/dec}$ et $p_{HF} = -40\ \mathrm{dB/dec}$. 5) 3 filtres. ❻ 3) $H_1 = \frac{1}{1+\frac{R}{R_{osc}}}$ et $\omega_1 = \frac{1+\frac{R}{R_{osc}}}{R(C+C_{osc})}$. ❼ 1) $\underline{H} = \frac{\underline{Z_0}}{\underline{Z_0}+\underline{Z_L}}$ avec $\underline{Z_0} = \frac{R_0}{1+j\omega R_0 C}$ et $\underline{Z_1} = R_L + j\omega L$. 2) $H_0 = \frac{1}{1+R_L/R_0}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{H_0 LC}}$ et $Q = \left(\frac{L}{R_0} + R_L C\right)^{-1}\sqrt{\frac{LC}{H_0}}$. 3) $\mathrm{Q} > 1/\sqrt{2}$. 4) $f_{\mathrm{res}} \simeq 7\ \mathrm{kHz}$. 5) $f_{c1} \simeq 5{,}9\ \mathrm{kHz}$ et $f_{c2} \simeq 7{,}9\ \mathrm{kHz}$. 6) $\mathrm{Q} \simeq 4{,}5$. ❽ 1) Passe bande. 2) $\mathrm{H}_0 = \frac{1}{2}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{LC}}} = 70{,}7 \cdot 10^3\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{R}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{2\mathrm{L}}} = 22$. 3) $\pm$ 20 dB/ décade. 4) $\phi_{BF} = \frac{\pi}{2}$ et $\phi_{HF} =$

$-\frac{\pi}{2}$. 5) $b = 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right) = -32{,}8\ \mathrm{dB}$ et $a = 20\log(H_0) = -6\ \mathrm{dB}$. 7) $u_2(t) = \frac{E_{1m}}{2}\cos(\omega_1 t)$. 9) Seule la pulsation $3\omega_2 = \omega_0$ survit. ❾ 1) $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau_1} \times j\omega\tau_2 \times \frac{1}{1+j\omega\tau_3}$. 3) Passe bande.