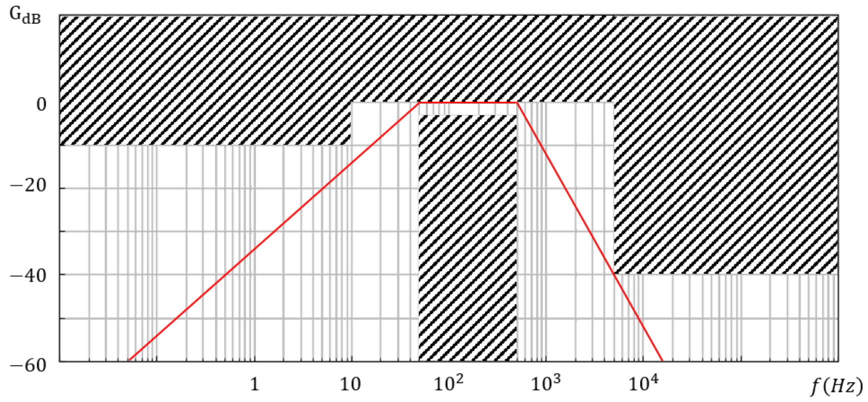
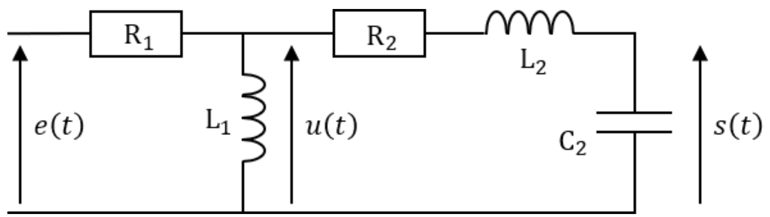
Exercice n°1 • Cahier des charges d'un microphone *cours*

1) et 2)



3) On associe un passe-haut d'ordre 1 avec un passe bas d'ordre 2.



Exercice n°2 • Étude d'un filtre *cours*

1) Dans la limite BF, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. Un pont diviseur de tension donne alors :

$$s(t) = \frac{R}{R+2R}\,e(t) = \frac{e(t)}{3}$$

Le circuit laisse passer les basses fréquences.

Dans la limite HF, le condensateur est équivalent à un fil. Ainsi, $s(t) = 0$. Le circuit coupe les hautes fréquences.

Il s'agit donc d'un **passe-bas**.

2) On pose $\underline{Z_{eq}}$ l'impédance équivalente de la résistance et du condensateur en dérivation.

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1} = \frac{R}{1+j\omega RC}$$

À l'aide d'un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s(t)}}{\underline{e(t)}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{2R+\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{3+j\omega 2RC} = \frac{1/3}{1+j\dfrac{\omega}{3/2RC}}$$

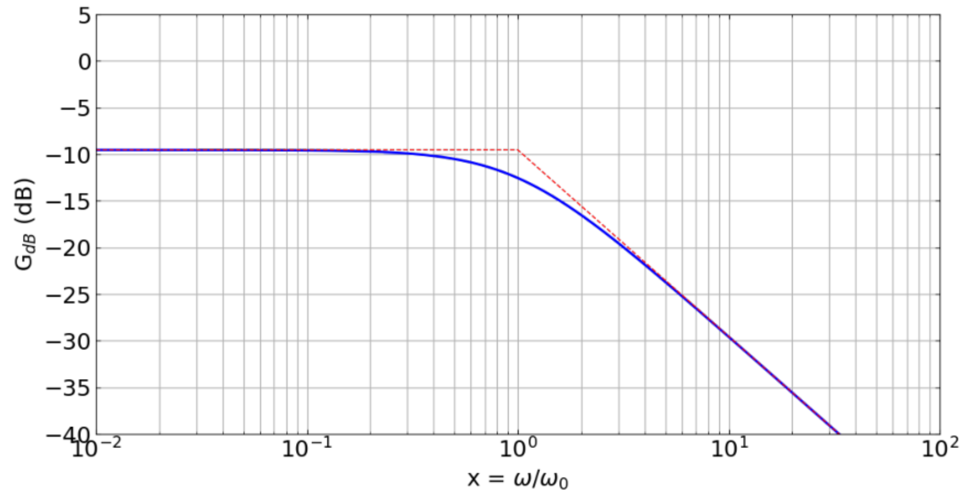
On trouve bien la forme demandée avec : $\boxed{H_0 = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{\omega_0 = \frac{3}{2RC}}$.

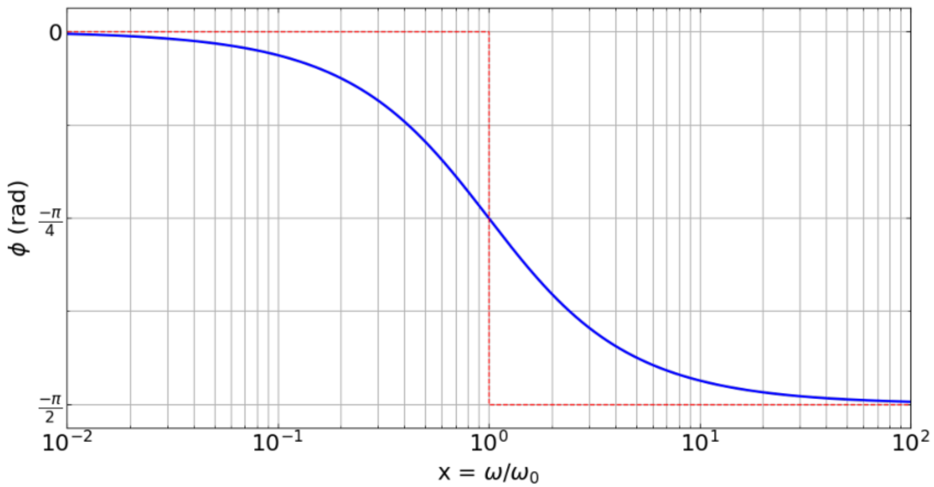
3) Il s'agit d'un filtre d'ordre 1.

4) Déterminons les comportements asymptotiques du gain et de la phase.

	BF ($\omega \ll \omega_0$)	HF ($\omega \gg \omega_0$)
$\underline{H}$	$\underline{H} \sim H_0$	$\underline{H} \sim \dfrac{H_0}{j\omega/\omega_0}$
G_{dB}	$G_{dB} = 20\log(H_0) = -9,54$ dB Pente nulle.	$G_{dB} = 20\log(H_0) - 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$ Pente de -20 dB/decade.
ϕ	$\phi = 0$	$\phi = -\dfrac{\pi}{2}$

Les deux asymptotes de se croisent en $\omega = \omega_0$.





5) Les fréquences de coupures x_c vérifient :

$$\left|\underline{H}(x_c)\right| = \frac{\max\left(\underline{H}(x)\right)}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1/3}{\sqrt{1+x_c^2}} = \frac{1/3}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \quad 1 + x_c^2 = 2$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{x_c = 1}$$

Il existe donc une unique pulsation de coupure : $\boxed{\omega_c = \omega_0 = \frac{3}{2RC}}$. La bande passante vaut : $\boxed{0 < \omega < \omega_0}$.

6) Le signal $e(t)$ possède trois composantes :

- Une composante continue dont l'amplitude est atténuée par 3.
- Une composante de pulsation $\omega_1 = \omega_0$ dont l'amplitude est atténuée par $3\sqrt{2} = 4,2$ et déphasée de $-\pi/4$.
- Une composante de pulsation $\omega_2 = 100 \times \omega_0$ dont l'amplitude est atténuée par 3000 environ (-50 dB environ) et déphasée de $-\pi/2$. On va pouvoir négliger cette composante.

Ainsi, le signal de sortie vaut :

$$s(t) \simeq \frac{U_0}{3} + \frac{U_1}{3\sqrt{2}} \cos(\omega_1 t)$$

Exercice n°3 • Identification d'un filtre inconnu *cours*

1) On voit graphiquement une sinusoïde qui oscille rapidement dans une sinusoïde qui oscille plus lentement. On a donc bien : $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$. On note :

$$e(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

Les deux sinusoïdes passent par 0 en $t = 0$ (puis sont croissantes). Il s'agit donc de sinus, donc : $\boxed{\phi_1 = \phi_2 = -\frac{\pi}{2}}$. Le premier sinus fait une période en 2 ms. Durant ce temps, l'autre en fait 10. Ainsi : $\boxed{f_1 = 500 \text{ Hz}}$ et $\boxed{f_2 = 5 \text{ kHz}}$. Enfin, on peut lire les amplitudes : $\boxed{A_1 = 1,0 \text{ V}}$ et $\boxed{A_2 = 0,5 \text{ V}}$.

2) On note B les amplitudes de sortie. On peut lire : $\boxed{B_1 = 0,9 \text{ V}}$ et $\boxed{B_2 = 0,1 \text{ V}}$.

3) On observe que la composante de fréquence élevée est davantage atténuée : le filtre est donc un passe-bas.

4) On applique la formule du filtre pour les deux fréquences f_1 et f_2.

$$|\underline{H}(f_1)| = \frac{B_1}{A_1} = 0,9 = \frac{H_0}{\sqrt{1 + (f_1/f_c)^2}}$$
$$|\underline{H}(f_2)| = \frac{B_2}{A_2} = 0,2 = \frac{H_0}{\sqrt{1 + (f_2/f_c)^2}}$$

On fait le rapport pour éliminer H_0 puis on isole f_c.

$$\sqrt{\frac{1 + (f_2/f_c)^2}{1 + (f_1/f_c)^2}} = \frac{0,9}{0,2} = 4,5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_c = \sqrt{\frac{f_2^2 - (4,5 \cdot f_1)^2}{4,5^2 - 1}} = 1,0 \text{ kHz}}$$

On eut ensuite en déduire la valeur de H_0 :

$$\boxed{H_0 = 0,9 \cdot \sqrt{1 + (f_1/f_c)^2} = 1,0}$$

5) On peut simplement prendre le filtre RC passe-bas du cours. Pour rappel : $\omega_c = 1/RC$, soit :

$$RC = \frac{1}{2\pi f_c} = 1,6 \cdot 10^{-4}\text{ s}$$

On peut donc choisir par exemple : $\boxed{R = 1,6\text{ k}\Omega}$ et $\boxed{C = 100\text{ nF}}$.

Exercice n°4 • Obtenir une ED grâce à la notation complexe *cours*

1) Impédance équivalente de la résistance et de la bobine en dérivation :

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right)^{-1} = \frac{j\omega L}{1 + j\omega L/R}$$

Pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{r + \underline{Z_{eq}}} = \frac{j\omega L}{r + j\omega L\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)}$$

Ainsi,

$$\boxed{\left(r + j\omega L\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right) \cdot \underline{s}(t) = j\omega L \cdot \underline{e}(t)}$$

2) On repasse en réel :

$$\left(r + L\left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{d}{dt}\right) \cdot s(t) = L\frac{dE}{dt} = 0$$

Ainsi,

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{L}{r}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

Exercice n°5 • Accordeur de guitare *cours - DM*

1) Le signal oscille autour de $\boxed{10\text{ mV}}$ (sa valeur moyenne).

2) On repère ce qui ressemble à un motif. Il a une période $T = 3,2$ ms. Sa fréquence vaut donc : $\boxed{f_{co} = 3,1 \cdot 10^2\text{ Hz}}$.

3) Le signal n'étant pas sinusoïdal, il possédera des harmoniques.

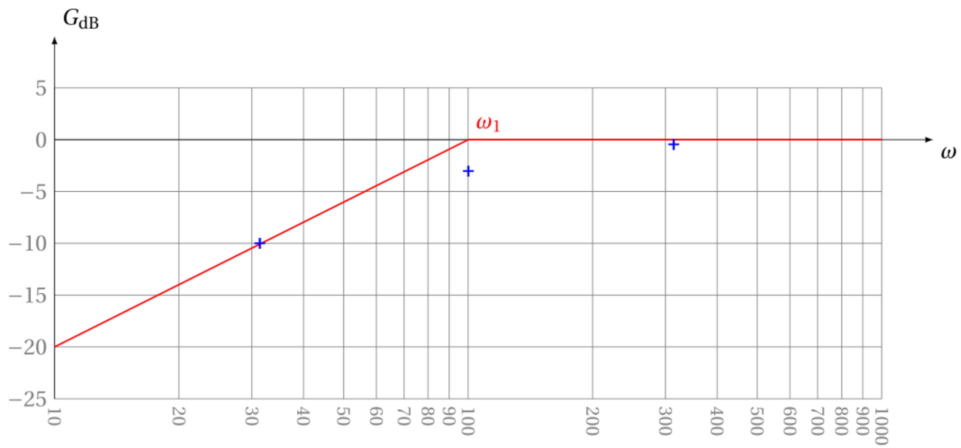
4) Il faut que, pour tout filtre indicé par l'entier n, l'impédance d'entrée du filtre $n+1$ soit très grande (en module) devant l'impédance de sortie du filtre n.

5) Un pont diviseur de tension donne :

$$\underline{H_1} = \frac{R_1}{R_1 + 1/j\omega C_1} = \frac{j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1} = \frac{j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_1}$$

6) Il s'agit d'un **passe-haut** : car $\underline{H_1}(0) = 0$ et $\underline{H_1}(\infty) = 1$; **d'ordre 1** : car polynôme d'ordre 1 au dénominateur. Sa pulsation caractéristique vaut : $\boxed{\omega_1 = 1/R_1C_1}$. Cette pulsation est la **pulsation de coupure du filtre**, c'est-à-dire la pulsation qui fait la frontière entre les BF et les HF.

7) On a : $\omega_1 = 100$ rad·s^{-1} donc $\boxed{f_1 = 15,9\text{ Hz}}$



8) Puisque $f_1 \ll f_{co}$ (fréquence fondamentale du signal), ce filtre permet de couper la composante continue (composante de fréquence nulle).

9) En BF, le gain vaut : $|\underline{H_2}(0)| = 1 + G_0 = 101$. Le gain en haute fréquence vaut : $|\underline{H_2}(\infty)| = 1$.

10) La fréquence caractéristique vaut $\boxed{f_2 = 500\text{ Hz}}$. Le seconde filtre, laisse passer

toutes les fréquences du spectre, mais amplifie d'un facteur 100 les fréquences inférieures à 500 Hz (les BF), donc en particulier le fondamental f_{co}.

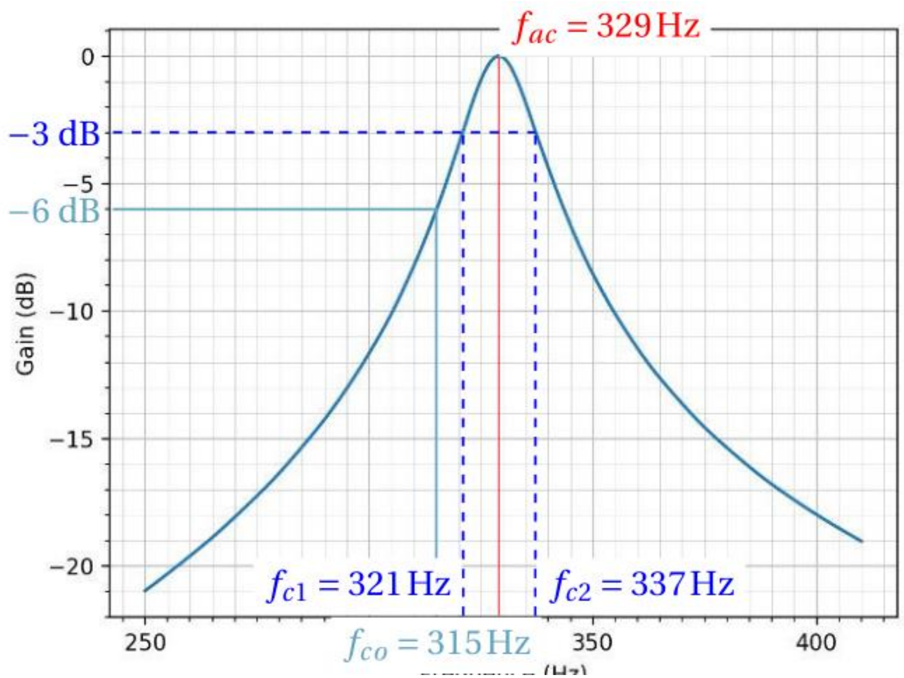
11) Il s'agit d'un filtre passe-bande d'ordre 2 (pentes de ± 20 dB/dec) avec un grand facteur de qualité (résonance très étroite). On peut lire graphiquement $\boxed{f_3 = 329 \text{ Hz}}$, soit une fréquence très proche de la fréquence que l'on souhaite isolée (f_{ac}).

12) La bande passante de ce filtre est l'intervalle de fréquence où :

$$\boxed{G_{dB}(f) > \max(G_{dB}) - 3 \text{ dB}}$$

On lit ici : $\boxed{BP = [321 \text{ Hz} ; 337 \text{ Hz}]}$.

13) Le gain en dB pour $f_{co} = 315$ Hz est de -6 dB. La composante fondamentale est donc atténuée d'un facteur : $10^{-6/20} = \boxed{0,5}$.



14) On observe un pic à fréquence nulle, d'amplitude 10 mV. Il s'agit de la composante continue (cohérent avec la question 1). Le premier pic, celui du fondamental, est situé autour de 300 Hz (cohérent avec la question 2). On observe enfin une série d'harmoniques, ce qui traduit le caractère « non sinusoïdal » du signal (cohérent avec la question 3).

15) On rappelle que le filtre $\mathcal{F}_1$ coupe uniquement la composante continue, sans toucher aux harmoniques du spectre. Le spectre (a) vérifie cette propriété : le pic à fréquence nulle a disparu, tous les autres pics ont vu leurs amplitudes conservées.

16) On rappelle que le filtre $\mathcal{F}_2$ amplifie d'un facteur 100 les amplitudes des pics de fréquences inférieures à 500 Hz, et ne touche que peu aux autres fréquences. Le spectre (d) possède cette propriété.

Remarque : le spectre (c) possède encore une composante continue, il ne correspond à la sortie d'aucun filtre. Le spectre (b) est amplifié uniformément d'un facteur 10 par rapport au spectre (a). Il ne correspond à la sortie d'aucun filtre.

17) On rappelle que le filtre $\mathcal{F}_3$ sélectionne la composante f_{ac} de manière très sélective avec un gain de 1 . En effet, l'harmonique de rang 2, dont la fréquence vaut $2f_{ac} = 659,2$ Hz est atténuée de -30 dB environ, correspondant à un gain de $10^{-30/20} = 0,03$. On peut donc négliger cet harmonique. Il en va de même pour les suivants qui sont encore plus atténués.

Spectre : un seul pic à $f_{ac} = 329$ Hz et d'amplitude $1,8$ V.

Signal temporel : une sinusoïde de période $1/f_{ac} = 3$ ms, de moyenne nulle et d'amplitude $1,8$ V.

Exercice n°6 • Impédance d'entrée de l'oscilloscope ★⯪☆

1) Cf. cours : $\boxed{H_0 = 1}$ et $\boxed{\omega_0 = 1/RC = 100 \text{ rad·s}^{-1}}$

2) Cf cours. Passe-bas d'ordre 1 avec $\omega_c = \omega_0$.

3) À l'aide d'une impédance équivalente et d'un pont diviseur de tension, on a :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + R} = \frac{1}{1 + R/\underline{Z_{eq}}} \quad \text{avec :} \quad \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{R_{osc}} + j\omega C + j\omega C_{osc}$$

Ainsi,

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + R\left(\dfrac{1}{R_{osc}} + j\omega\,(C + C_{osc})\right)} = \frac{\dfrac{1}{1 + R/R_{osc}}}{1 + j\omega \cdot \dfrac{R\,(C + C_{osc})}{1 + R/R_{osc}}}$$

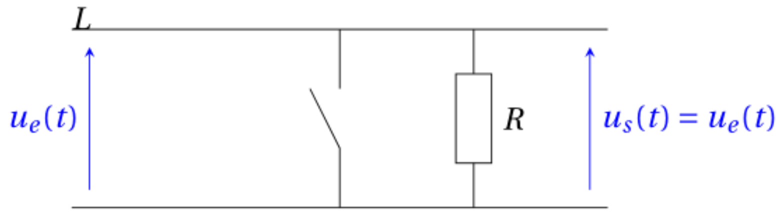
On en déduit :

$$\boxed{H_1 = \frac{1}{1 + R/R_{osc}} = 0,99} \qquad \boxed{\omega_1 = \frac{1 + R/R_{osc}}{R\,(C + C_{osc})} = 101 \text{ rad·s}^{-1}}$$

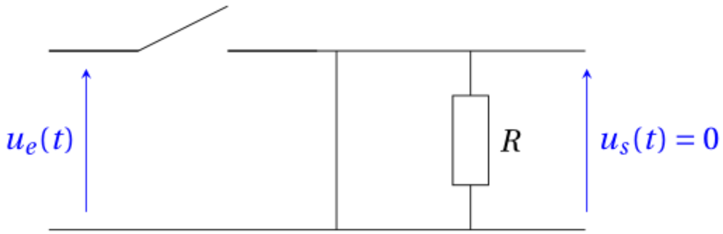
4) L'oscilloscope ne change ni la nature ni l'ordre du filtre. Il change presque pas les propriétés du filtre (différences non mesurables à TP du moins...). L'appareil de mesure ne perturbe donc pas le système que l'on cherche à mesurer.

Exercice n°7 • Filtre de Butterworth ★★☆

1) En BF :



En HF :



C'est donc un filtre passe-bas.

2) Notons $\underline{Z_{eq}}$ l'impédance équivalente de la résistance et du condensateur en dérivation.

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

Un pont diviseur de tension donne :

$$\underline{H} = \frac{1}{j\omega L/\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{1 + j\omega L\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)} = \boxed{\frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\dfrac{\omega L}{R}}}$$

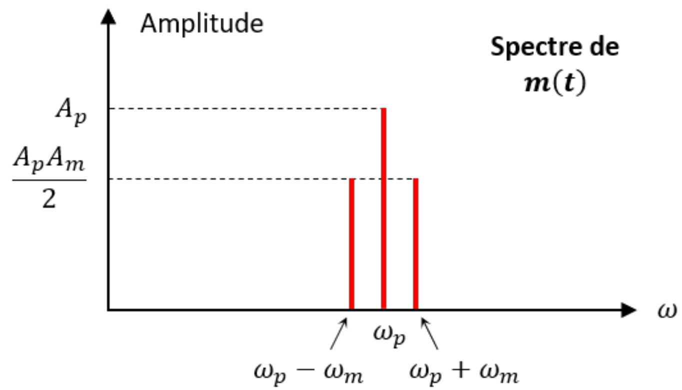
On trouve bien la forme demandée avec :

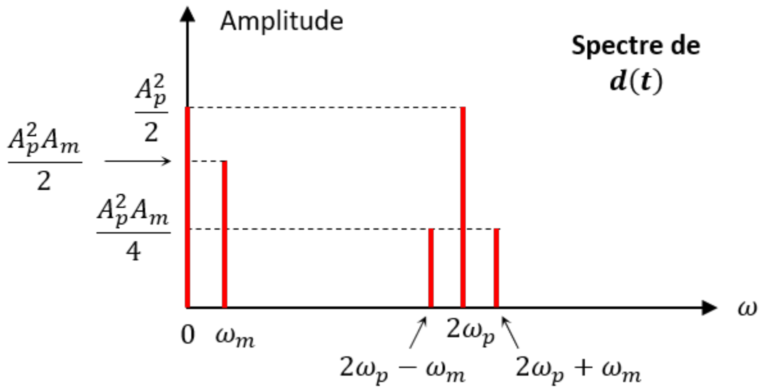
$$\boxed{H_0 = 1} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

3) En basse fréquence : $\underline{H} \sim 1$. Donc $G_{dB} = 0$. C'est une droite de pente nulle. En haute fréquence : $\underline{H} \sim \frac{1}{-(\omega/\omega_0)^2}$. Donc : $G_{dB} = -40\log(x)$. C'est une droite de -40 dB/dec. Les deux asymptotes se croisent en $x = 1$, donc en $\omega_c = \omega_0$. 4) Linéarisons les expressions :

$$\begin{aligned}
m(t) &= A_p \cos(\omega_p t) + A_p A_m \cos(\omega_p t)\cos(\omega_m t) \\
&= \frac{A_p A_m}{2}\cos((\omega_p - \omega_m)\,t) + A_p \cos(\omega_p t) + \frac{A_p A_m}{2}\cos((\omega_p + \omega_m)\,t) \\
d(t) &= \frac{A_p^2 A_m}{2}\cos((\omega_p - \omega_m)\,t)\cos(\omega_p t) + A_p^2 \cos(\omega_p t)\cos(\omega_p t) \\
&\quad + \frac{A_p^2 A_m}{2}\cos((\omega_p + \omega_m)\,t)\cos(\omega_p t) \\
&= \frac{A_p^2}{2} + \frac{A_p^2 A_m}{2}\cos(\omega_m t) + \frac{A_p^2 A_m}{4}\cos((2\omega_p - \omega_m)\,t) + \frac{A_p^2}{2}\cos(2\omega_p t) \\
&\quad + \frac{A_p^2 A_m}{4}\cos((2\omega_p + \omega_m)\,t)
\end{aligned}$$

On en déduit les spectres en amplitude.





5) Le filtre de Butterworth étant un filtre passe-bas d'ordre 2, il permet bien de garder uniquement les deux premières composantes de $d(t)$, à condition que :

$$\boxed{\omega_m < \omega_c \ll 2\omega_p}$$

On obtient alors :

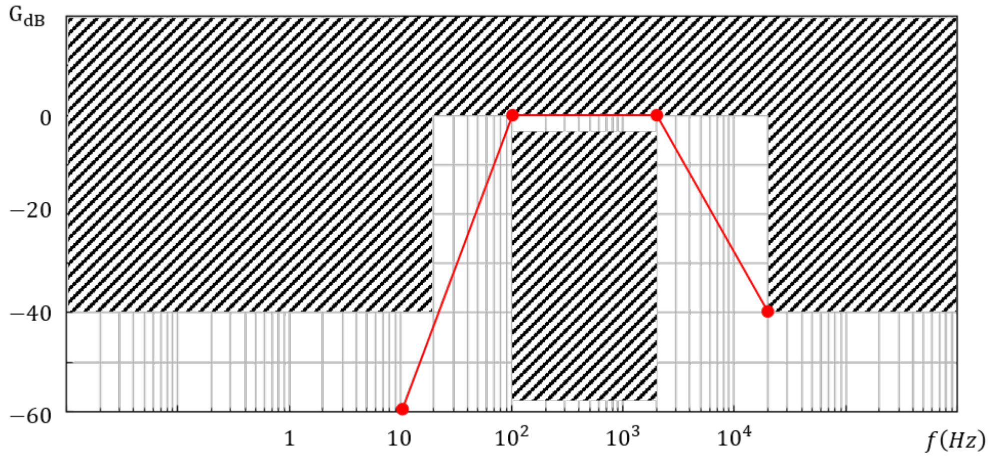
$$s'(t) = \frac{A_p^2}{2} + \frac{A_p^2 A_m}{2} \cos(\omega_m t)$$

6) Afin de filtrer la composante continue, il faut un filtre passe-haut de pulsation de coupure $\omega_{c2} < \omega_m$. On obtient alors :

$$s''(t) = \frac{A_p^2 A_m}{2} \cos(\omega_m t)$$

Exercice n°8 • Cahier des charges ★★☆

Voici le cahier des charges :



1) La largeur de la BP vaut :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

2) Il faut : $\boxed{f_0 = \sqrt{100 \times 2000} = 447 \text{ Hz}}$.

3) Le facteur de qualité doit être faible puisque l'on ne veut pas de résonance aiguë autour de f_0. On souhaite :

$$\Delta f = 2000 - 100 = 1900 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 0,24}$$

4) Analysons le cahier des charges. On constate qu'une pente de $+60$ dB/dec est nécessaire en BF et qu'une pente de -40 dB/dec est nécessaire en HF.

5) Or, le filtre étudié possède des pentes de ± 20 dB/dec. Il faut donc assembler 3 filtres.

6) Il faut veiller à ce que l'impédance de sortie d'un filtre soit très grande devant d'impédance d'entrée du filtre précédent.

Exercice n°9 • Sismomètre ★★☆

1) On réécrit l'ED en notation complexe :

$$\left(-\omega^2 m d^2 + j\gamma\omega + C\right) \underline{\theta} = d\, \underline{F_e}$$

De plus, $\underline{S} = j\omega\alpha\, \underline{\theta}$. On en déduit :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{F_e}} = \frac{j\omega\alpha d}{-\omega^2 m d^2 + j\gamma\omega + C}}$$

On a :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\alpha d/\gamma}{1 + \left(\dfrac{j\omega m d^2}{\gamma} + \dfrac{C}{j\omega\gamma}\right)} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On en déduit :

$$\boxed{A_0 = \frac{\alpha d}{\gamma}} \quad \frac{Q}{\omega_0} = \frac{md^2}{\gamma} \quad Q\omega_0 = \frac{C}{\gamma}$$

On en déduit :

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{md^2 C}}{\gamma}} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{md^2}}}$$

2) C'est un filtre passe-bande d'ordre 2 (celui du cours).

3) Voir cours.

4) Trouvons l'ED du système.

$$\underline{H}(\omega) = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{j\omega\omega_0 A_0/Q}{(j\omega)^2 + j\omega\,\dfrac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

On en déduit :

$$\left((j\omega)^2 + j\omega\,\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{S} = \frac{\omega_0 A_0}{Q}\,j\omega\,\underline{F_e}$$

On repasse en réel :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = \frac{\omega_0 A_0}{Q}\frac{f_e}{dt}$$

On obtient un oscillateur amorti. Les différents régimes possibles sont : pseudo-périodique si $Q > \sqrt{1/2}$, critique si $Q = \sqrt{1/2}$ et apériodique si $Q < \sqrt{1/2}$.

5) C'est le régime critique.

Exercice n°10 • Réponse d'un microphone ★★☆

1) À l'aide d'une impédance équivalente et d'un pont diviseur de tension, on a :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \underline{Z_1}/\underline{Z_0}} \quad \text{avec :} \quad \underline{Z_0} = \left(\frac{1}{R_0} + j\omega C\right)^{-1} \quad \underline{Z_1} = R_L + j\omega L$$

2) Ainsi,

$$\begin{aligned}\underline{H}(\omega) &= \frac{1}{1 + (R_L + j\omega L)\left(\dfrac{1}{R_0} + j\omega C\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \dfrac{R_L}{R_0} + j\omega\left(\dfrac{L}{R_0} + R_L C\right) - \omega^2 LC} \\ &= \frac{1/\left(1 + R_L/R_0\right)}{1 + j\omega\,\dfrac{L/R_0 + R_L C}{1 + R_L/R_0} - \omega^2\,\dfrac{LC}{1 + R_L/R_0}}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{1 + R_L/R_0}} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + R_L/R_0}{LC}}} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{LC\left(1 + R_L/R_0\right)}}{L/R_0 + R_L C}}$$

3) Il existe une résonance si le gain passe par un maximum. Le gain vaut :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{H_0}{(1 - x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2} = \frac{H_0}{g(x)}$$

Il est maximal lorsque $g(x)$ est minimal. Or,

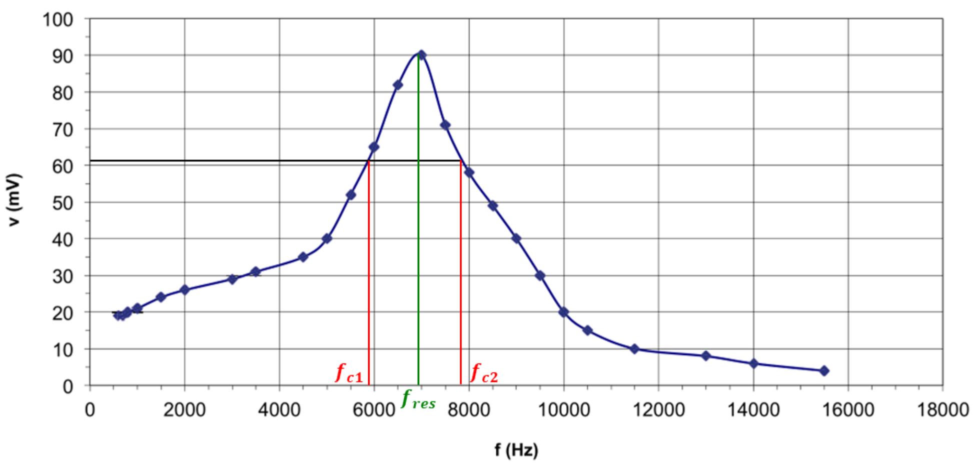
$$\frac{dg}{dx} = 2\left(-2x\right)\left(1 - x^2\right) + \frac{2x}{Q^2} = -4x\left(1 - x^2 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

La résonance correspond donc à :

$$\boxed{x_{res} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{res} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

Elle existe si $\boxed{Q > 1/\sqrt{2}}$.

4) Lecture graphique :



La fréquence de résonance est de l'ordre de : $\boxed{f_{res} \simeq 7 \text{ kHz}}$.

5) La définition de la fréquence de coupure à -3 dB est telle que :

$$\boxed{|\underline{H}(f_c)| = \frac{\max(\underline{H}(\omega))}{\sqrt{2}}} \simeq 63$$

On en déduit : $\boxed{f_{c1} \simeq 5,9 \text{ kHz}}$ et $\boxed{f_{c2} \simeq 7,9 \text{ kHz}}$.

6) On sait qu'en basse fréquence :

$$\text{v}(BF) = H_0 E_m \simeq 20 \text{ mV}$$

De plus, à la résonance,

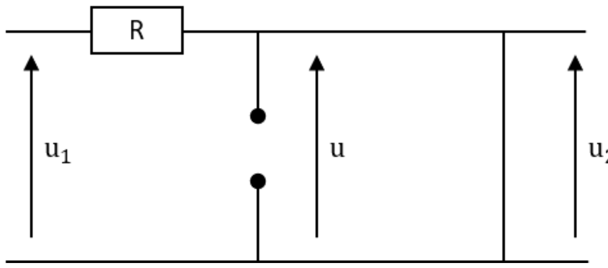
$$\text{v}(res) = Q H_0 E_m = Q\,\text{v}(BF) \simeq 90 \text{ mV}$$

On en déduit alors le facteur de qualité (surtension à la résonance) :

$$\boxed{Q = \frac{\text{v}(res)}{\text{v}(BF)} \simeq 4,5}$$

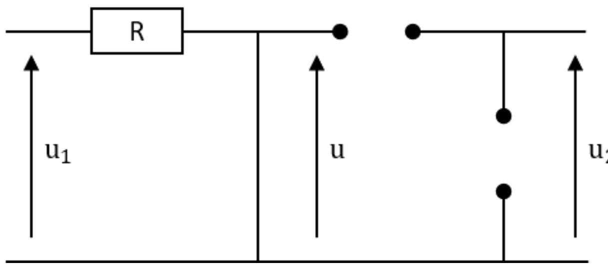
Exercice n°11 • Filtre de Hartley

1) Montage BF :



On en déduit que : $\underline{u_2} = 0$ en BF (tension aux bornes d'un fil).

Montage BF :



Le fil court-circuite les deux bobines. LA tension au bornes de chacune de ces bobines est donc nulle. Donc $\underline{u_2} = 0$ en HF.

Ce filtre coupe les BF et HF, c'est donc un passe-bande.

2) Pont diviseur de tension entre $\underline{u_2}$ et $\underline{u}$:

$$\underline{u_2} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_L} + \underline{Z_L}}\,\underline{u} = \frac{\underline{u}}{2}$$

Impédance équivalente des deux bobines en série avec, en dérivation, le condensateur :

$$\underline{Z_{eq}} = \left(j\omega C + \frac{1}{2j\omega L}\right)^{-1}$$

Pont diviseur de tension entre $\underline{u}$ et $\underline{u_1}$:

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + R}\,\underline{u_1} = \frac{1}{1 + R/\underline{Z_{eq}}}\,\underline{u_1} = \frac{1}{1 + R\left(j\omega C + \frac{1}{2j\omega L}\right)}\,\underline{u_1}$$

On en déduit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = \frac{1/2}{1 + j\left(\omega RC - \frac{R}{2\omega L}\right)}$$

Ainsi :

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{2}} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = 70,7 \cdot 10^3 \text{ rad·s}^{-1}} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}} = 22}$$

3) Graphiquement, on peut lire que les asymptotes ont une pente de ± 20 dB/dec. Retrouvons ces valeurs par le calcul. Le gain vaut :

$$G = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

En BF :

$$G_{dB} = 20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) + 20 \log(x)$$

En HF :

$$G_{dB} = 20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) - 20 \log(x)$$

On retrouve bien des pentes de ± 20 dB/dec.

4) Déterminons la phase. En BF, $\underline{H} \sim jxH_0/Q$ donc $\boxed{\phi = \pi/2}$. En HF, $\underline{H} \sim H_0/jxQ$ donc $\boxed{\phi = -\pi/2}$.

5) La valeur b correspond à l'ordonnée à l'origine des asymptotes. Donc :

$$\boxed{b = 20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) = -32,8 \text{ dB}}$$

La valeur a correspond à la valeur de G_{dB} en $x = 1$. Donc :

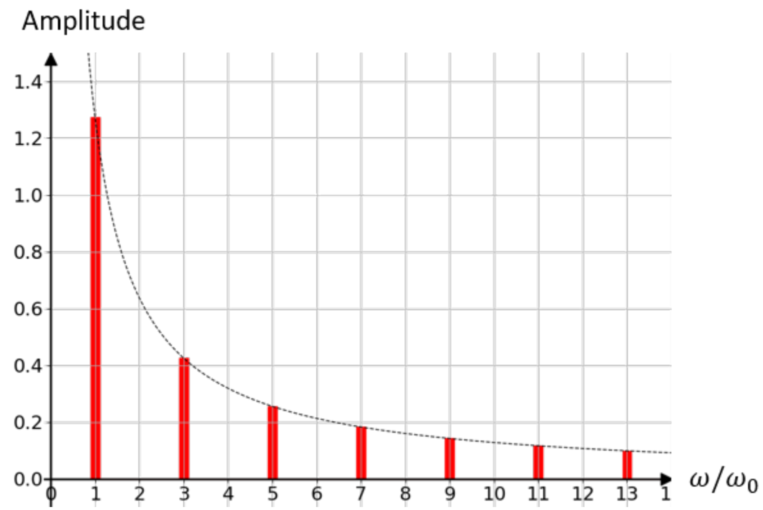
$$\boxed{a = 20 \log(H_0) = -6 \text{ dB}}$$

6) Ce montage peut servir de dérivateur en basse fréquence (si $x \ll 1$). Ce montage peut servir d'intégrateur en haute fréquence (si $x \gg 1$). L'inconvénient est que, dans les deux cas, le signal de sortie est fortement atténué.

7) Ce signal est composé de deux parties : une composante continue et une composante à la pulsation $\omega_1 = \omega_0$. La composante continue est totalement coupée. De plus, en ω_0 le gain vaut $1/2$ et le déphasage est nul. On en déduit,

$$\boxed{u_2(t) = \frac{E_{1m}}{2} \cos(\omega_1 t)}$$

8) Spectre :



L'amplitude des trois premiers pics vaut :

$$\boxed{A_1 = 4/\pi = 1,27 \text{ V}} \quad \boxed{A_3 = 4/3\pi = 0,42 \text{ V}} \quad \boxed{A_5 = 4/5\pi = 0,25 \text{ V}}$$

9) On a :

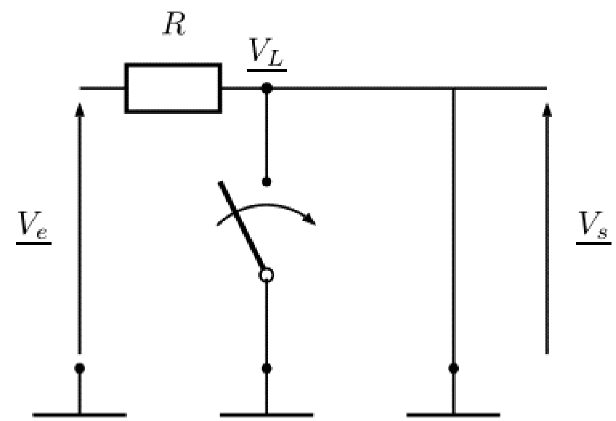
Pulsation	$\omega_2 = \omega_0/3$	$3\omega_2 = \omega_0$	$5\omega_2 = 5\omega_0/3$
Amp de e (V)	$1,27$	$0,42$	$0,25$
G_{dB} (dB)	-45	-6	-45
$10^{G_{dB}/20}$	$5,6 \cdot 10^{-3}$	$0,5$	$5,6 \cdot 10^{-3}$
Amp de s (mV)	$7,2$	213	$1,4$

Seule la pulsation $3\omega_2 = \omega_0$ a une amplitude non négligeable en sortie. On passe donc d'un signal carré de pulsation ω_2 à un signal sinusoïdal de pulsation $3\omega_2$, d'où le nom du filtre.

Exercice n°12 • Oscillateur à quartz ★★★

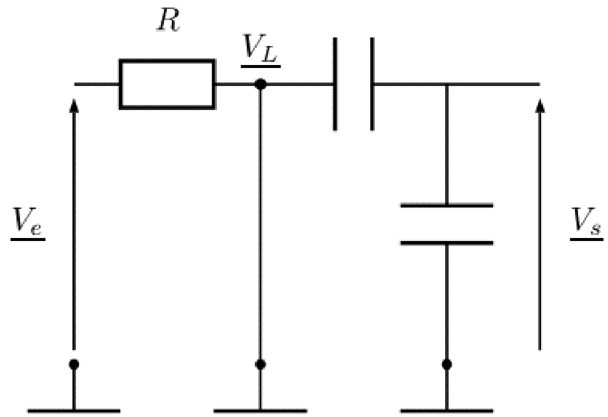
Partie 1 - Oscillateur électronique de Colpitts

1) En HF :



Tension aux bornes d'un fil : $\underline{V_s} = 0$.

En BF : on laisse les condensateurs pour éviter des confusions.



Le fil court-circuite les deux condensateurs. Donc la tension aux bornes de chaque condensateur est nulle : $\underline{V_s} = 0$.

On obtient donc un filtre **passe-bande**.

2) On applique deux ponts diviseurs successifs.

$$\underline{V_s} = \frac{\underline{V_L}}{2} \quad \text{et} \quad \underline{V_L} = \frac{\underline{V_e}}{1 + R/\underline{Z_{eq}}} \quad \text{avec :} \quad \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_L}} + \frac{1}{2\,\underline{Z_C}} = \frac{1}{j\omega L_0} + \frac{j\omega C}{2}$$

Ainsi,

$$\underline{H_0} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1/2}{1 + \dfrac{R}{j\omega L_0} + \dfrac{j\omega RC_0}{2}} = \frac{1/2}{1 + j\dfrac{R}{L_0}\sqrt{\dfrac{C_0L_0}{2}}\left(\dfrac{\omega}{\sqrt{\dfrac{2}{L_0C_0}}} - \dfrac{\sqrt{\dfrac{2}{L_0C_0}}}{\omega}\right)}$$

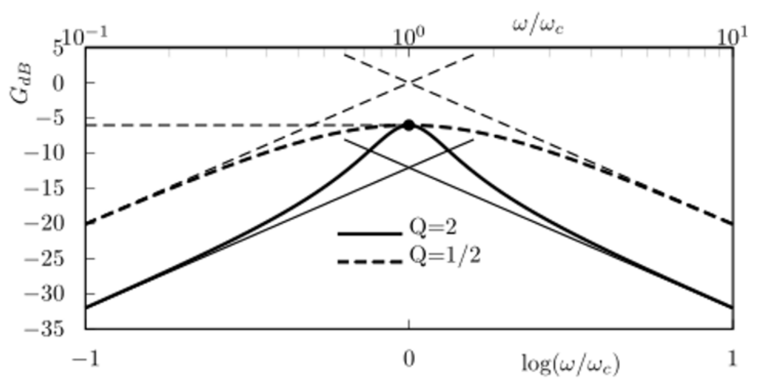
CQFD. On retrouve bien l'expression demandée. On constate que $\underline{H_0} \to 0$ en BF et HF. C'est bien un passe-bande.

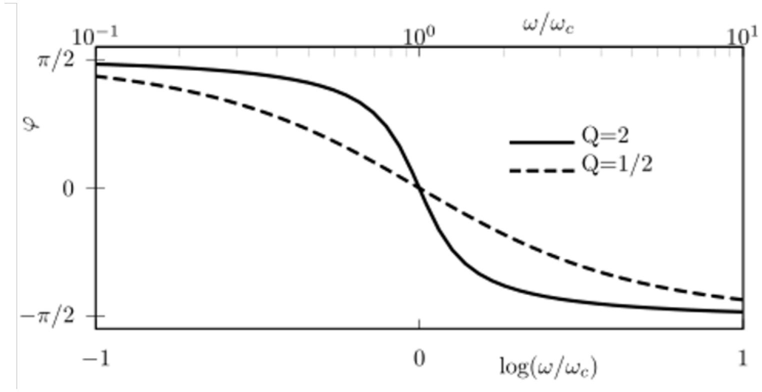
3) On a :

$$\text{BF :} \quad \underline{H_0} \sim \frac{jx}{2Q} \qquad G_{dB} = -20\log(Q) + 20\log(x) \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{HF :} \quad \underline{H_0} \sim \frac{1}{2jxQ} \qquad G_{dB} = -20\log(Q) - 20\log(x) \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi,





4) Puisque $i_+ = 0$, le filtre de Collpits est en sortie ouverte comme dans l'étude précédente, on peut utiliser sa fonction de transfert pour écrire :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s'}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} \cdot \frac{\underline{V_s'}}{\underline{V_s}} = \underline{H_0} \cdot \underline{H_1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{1/2}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

5) Le nouveau branchement assure que $\underline{V_s'} = \underline{V_e}$. Ainsi,

$$\frac{\underline{V_e}}{\underline{V_e}} = \underline{H_0} \cdot \underline{H_1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{1/2}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \left(\frac{j\omega Q}{\omega_0} + \frac{Q\omega_0}{j\omega}\right)\right) \cdot \underline{V_e} = \frac{1 + R_2/R_1}{2} \cdot \underline{V_e}$$

$$\times\frac{j\omega\omega_0}{Q} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega_0}{Q} \cdot j\omega + (j\omega)^2 + \omega_0^2\right) \cdot \underline{V_e} = \frac{1 + R_2/R_1}{2} \cdot \frac{\omega_0}{Q} \cdot j\omega\, \underline{V_e}$$

$$\mathcal{R}e \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) \cdot V_e = \frac{1 + R_2/R_1}{2} \cdot \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dV_e}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2V_e}{dt^2} + \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{dV_e}{dt} + \omega_0^2\, V_e(t) = 0}$$

6) Il faut $\boxed{R_1 = R_2}$.

Partie 2 - Modèle électrocinétique du quartz

7) On a :

$$\boxed{\underline{Z} = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L + 1/j\omega C}\right)^{-1} = \frac{j\omega L + 1/j\omega C}{1 + \dfrac{C'}{C} - \omega^2 LC'}}$$

8) On a :

$$\underline{Z}(\omega_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad j\omega_s L + 1/j\omega_s C = 0$$

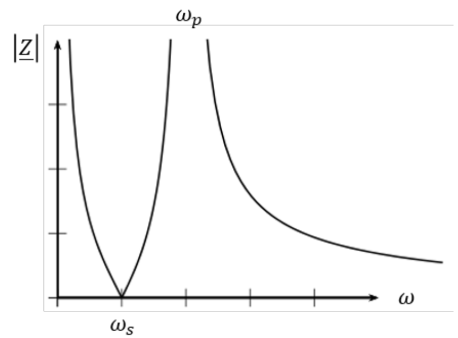
$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$|\underline{Z}|(\omega_p) = \infty \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{C'}{C} - \omega_p^2 LC' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC'} + \frac{1}{LC}} > \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

9) On sait que :
- $\underline{Z} = 0$ en $\omega = \omega_s$ et $\omega = \infty$;
- $|\underline{Z}| = \infty$ en $\omega = \omega_p$ et $\omega = 0$;

On en déduit l'allure du graphe :



10) La résistance r ne modifie pas les valeurs en $\omega = 0$ et ∞. En revanche, $|\underline{Z}|(\omega_s) \neq 0$ et $|\underline{Z}|(\omega_p) \neq \infty$.

11) Le quartz a une impédance durement imaginaire :

$$\boxed{\underline{Z} = j \cdot \frac{\omega L - 1/\omega C}{1 + \dfrac{C'}{C} - \omega^2 LC'}}$$

Il a donc bien un comportement capacitif ou inductif en fonction du signe de la partie imaginaire : inductif si > 0 et capacitif si < 0. On a :

$$\omega L - 1/\omega C > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega > \omega_s$$
$$1 + \frac{C'}{C} - \omega^2 LC' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega < \omega_p$$

On en déduit :

$$\frac{\omega L - 1/\omega C}{1 + \dfrac{C'}{C} - \omega^2 LC'} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_s < \omega < \omega_p$$

Bilan : Comportement inductif pour $\omega_s < \omega < \omega_p$. Comportement capacitif si $\omega < \omega_s$ ou $\omega > \omega_p$.

Partie 3 - Oscillateur de Pierce

12) D'après Q2, en remplaçant L_0 par L_{eq}, on a :

$$2 = L_{eq}C_0\omega_0^2 = C_0 \cdot \frac{L}{1 + C'/C} \cdot \frac{1 - (\omega_s/\omega_0)^2}{1 - (\omega_0/\omega_p)^2} \cdot \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \quad 2 = LC \cdot \frac{C_0}{C + C'} \cdot \frac{1 - (\omega_s/\omega_0)^2}{1 - (\omega_0/\omega_p)^2} \cdot \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \quad 2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2 \cdot \frac{2}{K} \cdot \frac{1 - (\omega_s/\omega_0)^2}{1 - (\omega_0/\omega_p)^2}$$

$$\Rightarrow \quad K\left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_p}\right)^2\right) = \left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2 - 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2 + K\left(\frac{\omega_0}{\omega_p}\right)^2 = 1 + K$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{1 + K}{1/\omega_s^2 + K/\omega_p^2}}$$

13) Dans un oscillateur à bobine,

$$\frac{u(\omega_0^2)}{\omega_0^2} = \sqrt{\frac{u(L^2)}{L^2} + \frac{u(C^2)}{C^2}} = 4,8\ \%$$

Dans un oscillateur à quartz, cette variation est d'après l'énoncé de 0,0008 %. Ce dernier est donc beaucoup moins sensible aux variations de température.