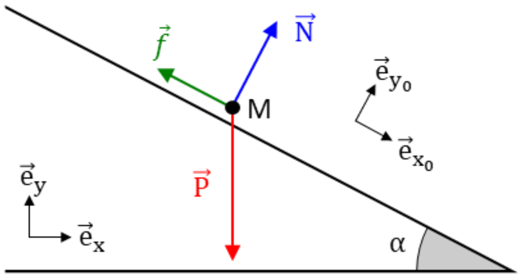
Mécanique classique | Chapitre 1 | TD (M1)

Exercice n°1 - Conversion d'unité ★☆☆

1) Une voiture avance à la vitesse $\mathrm{v} = 70\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Quelle est sa vitesse en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$?

2) Un moteur tourne à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega = 3500\ \mathrm{tr \cdot min^{-1}}$. Quelle est sa vitesse angulaire en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$?

Exercice n°2 - Projection de vecteurs ★☆☆



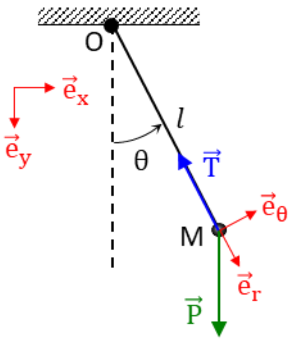


Schéma de gauche : Un point matériel M dévale une pente faisant un angle α avec l'horizontale. Il est soumis à trois forces : le poids $\vec{\mathrm{P}} = -\mathrm{mg}\,\vec{e}_y$, la réaction normale du support $\vec{\mathrm{N}} = \mathrm{N}\,\vec{e}_{y_0}$ et les frottements $\vec{f} = -f\,\vec{e}_{x_0}$.

1) Donner les composantes de $\vec{\mathrm{P}}$ dans la base $(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})$, et les composantes de $\vec{\mathrm{N}}$ et $\vec{f}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

2) Exprimer $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ en fonction de $\vec{e}_{x_0}$ et $\vec{e}_{y_0}$, et vice-versa.

Schéma de droite : On considère une masse M attachée à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ. A l'autre extrémité, le fil est attaché au point O d'un support fixe. La masse est soumise à son poids $\vec{\mathrm{P}} = \mathrm{mg}\,\vec{e}_y$ et à la tension du fil $\vec{\mathrm{T}} = -\mathrm{T}\,\vec{e}_r$.

3) Exprimer les composantes de $\vec{\mathrm{P}}$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et les les composantes de $\vec{\mathrm{T}}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

4) Exprimer $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ en fonction de $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, et vice-versa.

Exercice n°3 - Trajectoire hélicoïdale ★★☆

Un mobile M décrit une trajectoire d'équation paramétrique (dans la base cartésienne) :

$$\begin{cases} \mathrm{x(t)} = \mathrm{R}\cos(\omega \mathrm{t}) \\ \mathrm{y(t)} = \mathrm{R}\sin(\omega \mathrm{t}) \\ \mathrm{z(t)} = \alpha\,\mathrm{t} \end{cases}$$

1) Déterminer la dimension de R, ω et α, qui sont des constantes réelles positives.

2) Donner les équations paramétriques cylindriques du mouvement $r(t)$, $\theta(t)$, $z(t)$.

3) Déterminer l'allure de la trajectoire.

4) Donner les expressions du vecteur vitesse dans les deux bases. Quelle est la norme de ce vecteur ?

Exercice n°4 - Cardioïde ★★☆

Un mobile ponctuel M décrit la courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires (r, θ) est :

$$r = \frac{a}{2}(1 + \cos(\theta))$$

où a est une constante positive. L'angle θ varie avec le temps selon la loi horaire : $\theta(t) = \omega t$ où la vitesse angulaire ω est constante.

1) Déterminer les coordonnées cartésiennes $x(t)$, $y(t)$ du point M puis exprimer la norme du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ fonction a, ω et t.

2) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{\mathrm{v}}$ en fonction du temps, de ω et de a à la fois en base polaire et en base cartésienne.

3) Déterminer sa norme.

4) Tracer la trajectoire.

Exercice n°5 - Mouvement d'un ballon-sonde avec vent latéral ★☆☆

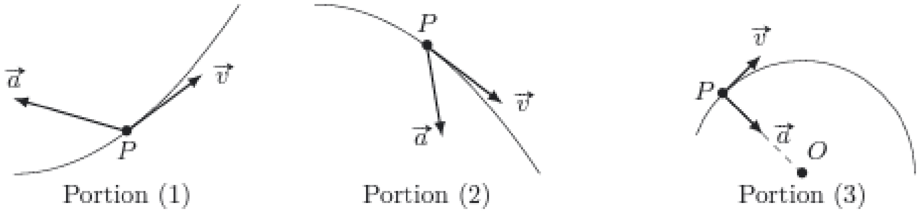
Un ballon-sonde a une vitesse d'ascension verticale v_0 indépendante de son altitude z. Le vent lui communique une vitesse horizontale $\mathrm{v}_x = z/\tau$, proportionnelle à son altitude. On note (Oz) l'axe vertical ascendant.

1) Déterminer les lois du mouvement $x(t)$ et $z(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $x(z)$, en supposant qu'au temps $t = 0$, le ballon est lâché de l'origine du repère.

2) Exprimer le vecteur accélération.

Exercice n°6 - Mouvements d'un planeur ★☆☆

Nous nous intéressons à l'évolution de la norme du vecteur vitesse d'un planeur dans trois portions de sa trajectoire représentées ci-dessous. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accélération $\vec{a}$ du planeur assimilé à un point P sont indiqués à un instant donné.



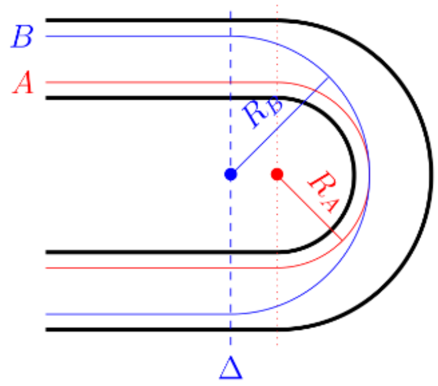
1) Déterminer pour chaque portion de trajectoire si la norme de la vitesse de P augmente ou diminue.

2) La portion (3) est circulaire de rayon R et de centre O. Quel est le lien entre la norme du vecteur accélération et celle du vecteur vitesse ?

Exercice n°7 - Course de voiture ★★☆

Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Alonso et Button arrivent en ligne droite à la même vitesse et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent le virage de deux façons différentes :

- Alonso suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 75{,}0\ \mathrm{m}$;
- Button négocie le même virage mais sur une trajectoire de rayon $R_B = 90{,}0\ \mathrm{m}$.



On cherche à trouver la trajectoire optimale, c'est-à-dire à savoir lequel des deux pilotes gagne du temps dans le virage.

1) Déterminer les distances D_A et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Peut-on conclure ?

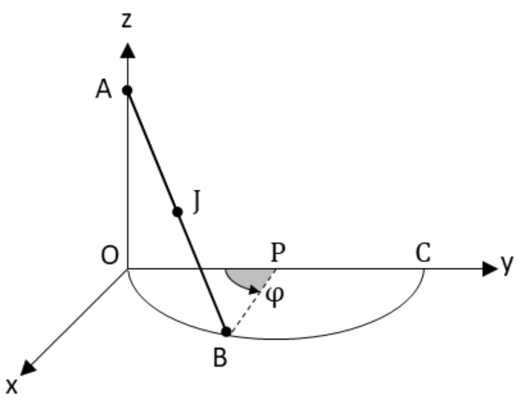
2) On imagine que les deux voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage. Déterminer ces vitesses en sachant que l'accélération radiale des voitures doit rester inférieure à 0,8 g (au-delà de cette limite, elles dérapent et finissent la course dans les graviers). Les calculer numériquement.

3) Quelle est finalement la meilleure trajectoire ?

Exercice n°8 - Chute guidée d'un bâton ★★★

Une barre rectiligne AB de longueur 2b se déplace dans le référentiel cartésien $\mathcal{R}_0 = \left(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ de sorte que :

- son extrémité A est guidée sur le demi-axe positif (Oz) ;
- son extrémité B est guidée par le demi-cercle du plan (Oxy) de centre $\mathrm{P} = (0, \mathrm{b}, 0)$ et de rayon b. On repère la position de B par l'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{\mathrm{PO}}, \overrightarrow{\mathrm{PB}}\right)$



À l'instant initial $t = 0$, B se trouve en O. À l'instant final, B se trouve en C. Le point B se déplace avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi} = \omega$ constante.

<u>Formulaire</u> : $1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Nous allons repérer le point B dans la base polaire de centre P, de vecteur radial :

$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{PB}}{\|\overrightarrow{PB}\|}$$

et de vecteur orthoradial $\vec{e}_\varphi$ de sorte que $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ forme une base directe.

1) Reproduire le schéma et dessiner la base polaire $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$.

2) Exprimer les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\varphi$ en fonction de φ, $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

3) Déterminer, en fonction de ω, la durée T du mouvement.

4) Déterminer l'expression des vecteurs positions $\overrightarrow{PB}$, vitesse $\vec{v}_B$ et accélération $\vec{a}_B$ de B dans la base polaire.

5) Déterminer l'expression des coordonnées cartésiennes $x_B(t)$ et $y_B(t)$ du point B en fonction de ω, t et b.

6) Soit J le point au milieu de la barre. Montrer que les expressions horaires du point J dans la base cartésienne sont :

$$x_J(t) = \frac{b}{2}\sin(\omega t) \qquad y_J(t) = \frac{b}{2}\,(1 - \cos(\omega t)) \qquad z_J(t) = b\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

7) Calculer le carré de la norme de la vitesse du point J, $v_J^2(t)$, en fonction de ω, t et b.

8) Le mouvement du point J est-il accéléré, décéléré ou uniforme ?

9) Donner la définition de la valeur moyenne d'une fonction $f(t)$ entre 0 et T, puis calculer la valeur moyenne du carré de la vitesse $\langle v_J^2 \rangle$ entre 0 et T, en fonction de ω et b.

Éléments de réponse

❶ 1) $v = 19{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 2) $\omega = 366{,}5\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. ❷ 1) $\vec{P} = P\left[-\cos(\alpha)\,\vec{e}_{y_0} + \sin(\alpha)\,\vec{e}_{x_0}\right]$, $\vec{N} = N\left[\cos(\alpha)\,\vec{e}_y + \sin(\alpha)\,\vec{e}_x\right]$ et $\vec{f} = f\left[-\cos(\alpha)\,\vec{e}_x + \sin(\alpha)\,\vec{e}_y\right]$. 2) $\vec{e}_x = \cos(\alpha)\,\vec{e}_{x_0} + \sin(\alpha)\,\vec{e}_{y_0}$, $\vec{e}_y = \cos(\alpha)\,\vec{e}_{y_0} - \sin(\alpha)\,\vec{e}_{x_0}$, $\vec{e}_{x_0} = \cos(\alpha)\,\vec{e}_x - \sin(\alpha)\,\vec{e}_y$ et $\vec{e}_{y_0} = \cos(\alpha)\,\vec{e}_y + \sin(\alpha)\,\vec{e}_x$. 3) $\vec{P} = P(\cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta)$ et $\vec{T} = T(-\cos(\theta)\,\vec{e}_y - \sin(\theta)\,\vec{e}_x)$. 4) $\vec{e}_x = \cos(\theta)\,\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\,\vec{e}_r$, $\vec{e}_y = \cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_y + \sin(\theta)\,\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\theta = \cos(\theta)\,\vec{e}_x - \sin(\theta)\,\vec{e}_y$. ❸ 1) $[R] = L$, $[\omega] = T^{-1}$ et $[\alpha] = L \cdot T^{-1}$. 2) $r(t) = R$, $\theta(t) = \omega t$ et $z(t) = \alpha\,t$. 3) Une hélice. 4) $\vec{v} = -R\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x + R\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y + \alpha\,\vec{e}_z = R\omega\,\vec{e}_\theta + \alpha\,\vec{e}_z$ et $v = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}$. ❹ 1) $x(t) = \frac{a}{2}(1 + \cos(\omega t))\cos(\omega t)$ et $y(t) = \frac{a}{2}(1 + \cos(\omega t))\sin(\omega t)$. 2) $v_r = -\frac{a\omega}{2}\sin(\omega t)$, $v_\theta = \frac{a\omega}{2}(1 + \cos(\omega t))$, $v_x = -\frac{a\omega}{2}[1 + 2\cos(\omega t)] \cdot \sin(\omega t)$ et $v_y = \frac{a\omega}{2}[-\sin^2(\omega t) + \cos(\omega t) + \cos^2(\omega t)]$. 3) $v = a\omega\sqrt{\frac{1+\cos(\omega t)}{2}}$. ❺ 1) $z(t) = v_0 t$, $x(t) = \frac{v_0}{2\tau}t^2$ et $x = \frac{z^2}{2v_0\tau}$. 2) $\vec{a} = \frac{v_0}{\tau}\,\vec{e}_x$. ❻ 1) v_1 diminue, v_2 augmente et v_3 est constant. 2) $a = \frac{v^2}{R}$. ❼ 1) $D_B = \pi R_B = 282{,}8\ \mathrm{m}$ et $D_A = \pi R_A + 2(R_B - R_A) = 265{,}6\ \mathrm{m}$. 2) $v = \sqrt{aR}$. Donc : $v_B = 26{,}58\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $v_A = 24{,}26\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 3) $t_A = 10{,}95\ \mathrm{s}$ et $t_B = 10{,}63\ \mathrm{s}$. ❽ 2) $\vec{e}_r = -\cos(\varphi)\ \vec{e}_y + \sin(\varphi)\ \vec{e}_x$ et $\vec{e}_\varphi = \cos(\varphi)\ \vec{e}_x + \sin(\varphi)\ \vec{e}_y$. 3) $T = \frac{\pi}{\omega}$. 4) $\overrightarrow{PB} = b\,\vec{e}_r$, $\vec{v}_B = b\omega\,\vec{e}_\varphi$ et $\vec{a}_B = -b\omega^2\,\vec{e}_r$. 5) $x_B(t) = b\ \sin(\omega t)$ et $y_B(t) = b\ (1 - \cos(\omega t))$. 6) Partir du fait que : $\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$. 7) $v_J^2(t) = \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2\left(1 + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)$. 8) Accéléré. 9) $\langle v_J^2 \rangle = \frac{3}{2}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2$.