Mécanique classique | Chapitre 1 | Correction TD (M1)

Exercice n°1 - Conversion d'unité ★☆☆

1) On a :

$$v = 70\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 70\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 70\,\frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = \boxed{19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

2) On a :

$$\omega = 3500\ \text{tr}\cdot\text{min}^{-1} = 3500\,\frac{\text{tour}}{\text{minute}} = 3500\,\frac{2\pi\ \text{rad}}{60\ \text{s}} = \boxed{366{,}5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Exercice n°2 - Projection de vecteurs ★☆☆

Rappel de la technique vue en cours

Soit une base orthonormée directe et un angle α qui varie. Si l'orientation relative de la base et d'un vecteur $\vec{F}$ varie lorsque α varie, alors $\vec{F}$ s'écrit de la forme suivante :

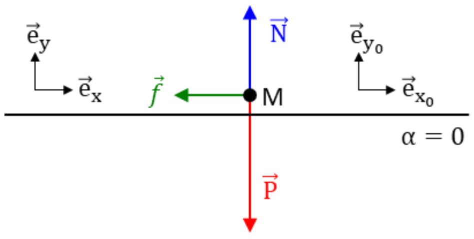
$$\vec{F} = F\left[\cos(\alpha)\left(\pm\vec{u}_{1,2}\right) + \sin(\alpha)\left(\pm\vec{u}_{1,2}\right)\right]$$

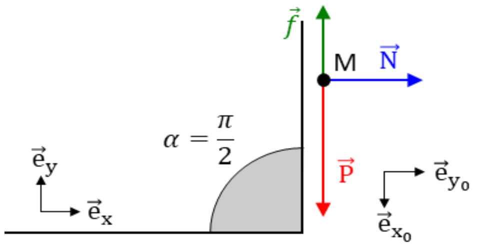
Avec :

- F la norme du vecteur $\vec{F}$;
- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les deux vecteurs de base de la BOND.

Pour trouver quel vecteur placer avec le $\cos(\alpha)$, il faut se placer dans le cas particulier $\alpha = 0$. Pour trouver quel vecteur placer avec le $\sin(\alpha)$, il faut se placer dans le cas particulier $\alpha = \pi/2$.

Dessinons ces deux cas limites.





1) Prenons l'exemple du poids $\vec{P}$. Lorsque α varie, $\vec{P}$ reste fixe relativement à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. On en déduit :

$$\boxed{\vec{P} = -P\,\vec{e}_y \rightarrow \text{Dans la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y)}$$

En revanche, l'orientation entre le vecteur $\vec{P}$ et la base $(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})$ varie lorsque α varie. On applique donc la méthode précédente :

$$\vec{P} = P\left[\cos(\alpha)\left(\pm\vec{u}_{1,2}\right) + \sin(\alpha)\left(\pm\vec{u}_{1,2}\right)\right]$$

Lorsque $\alpha = 0$, $\vec{P}$ est colinéaire à $-\vec{e}_{y_0}$. On en déduit :

$$\vec{P} = P\left[-\cos(\alpha)\,\vec{e}_{y_0} + \sin(\alpha)\left(\pm\vec{u}_{1,2}\right)\right] \rightarrow \text{Dans la base } (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})$$

Lorsque $\alpha = \pi/2$, $\vec{P}$ est colinéaire à $+\vec{e}_{x_0}$. On en déduit :

$$\boxed{\vec{P} = P\left[-\cos(\alpha)\,\vec{e}_{y_0} + \sin(\alpha)\,\vec{e}_{x_0}\right] \rightarrow \text{Dans la base } (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})}$$

Passons à la réaction normale du support $\vec{N}$. Lorsque α varie, $\vec{N}$ reste fixe relativement à la base $(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})$. On en déduit :

$$\boxed{\vec{N} = N\,\vec{e}_{y_0} \rightarrow \text{Dans la base } (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})}$$

En revanche, l'orientation entre le vecteur $\vec{N}$ et la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ varie lorsque α varie. On applique donc la méthode précédente. Lorsque $\alpha = 0$, $\vec{N}$ est colinéaire à $+\vec{e}_y$. Lorsque $\alpha = \pi/2$, $\vec{N}$ est colinéaire à $+\vec{e}_x$. On en déduit :

$$\boxed{\vec{N} = N\left[\cos(\alpha)\,\vec{e}_y + \sin(\alpha)\,\vec{e}_x\right] \rightarrow \text{Dans la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y)}$$

Passons finalement aux frottements $\vec{f}$. Lorsque α varie, $\vec{f}$ reste fixe relativement à la base $(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})$. On en déduit :

$$\boxed{\vec{f} = -f\,\vec{e}_{x_0} \rightarrow \text{Dans la base } (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0})}$$

En revanche, l'orientation entre le vecteur $\vec{f}$ et la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ varie lorsque α varie. Lorsque $\alpha = 0$, $\vec{f}$ est colinéaire à $-\vec{e}_x$. Lorsque $\alpha = \pi/2$, $\vec{f}$ est colinéaire à $+\vec{e}_y$. On en déduit :

$$\boxed{\vec{f} = f\left[-\cos(\alpha)\,\vec{e}_x + \sin(\alpha)\,\vec{e}_y\right] \rightarrow \text{Dans la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y)}$$

2) On a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{e}_x = \cos(\alpha)\,\vec{e}_{x_0} + \sin(\alpha)\,\vec{e}_{y_0} & \vec{e}_{x_0} = \cos(\alpha)\,\vec{e}_x - \sin(\alpha)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_y = \cos(\alpha)\,\vec{e}_{y_0} - \sin(\alpha)\,\vec{e}_{x_0} & \vec{e}_{y_0} = \cos(\alpha)\,\vec{e}_y + \sin(\alpha)\,\vec{e}_x \end{array}}$$

3) On a :

$$\boxed{\vec{P} = P(\cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta) \qquad \vec{T} = T\left(-\cos(\theta)\,\vec{e}_y - \sin(\theta)\,\vec{e}_x\right)}$$

4) On a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{e}_x = \cos(\theta)\,\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\,\vec{e}_r & \vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_y + \sin(\theta)\,\vec{e}_x \\ \vec{e}_y = \cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta & \vec{e}_\theta = \cos(\theta)\,\vec{e}_x - \sin(\theta)\,\vec{e}_y \end{array}}$$

Exercice n°3 - Trajectoire hélicoïdale ★☆☆

1) On a :

$\boxed{[\mathrm{R}] = [\mathrm{x}] = \mathrm{L}}$ Il s'agit d'une distance.

$\boxed{[\omega] = \left[\frac{1}{\mathrm{t}}\right] = \mathrm{T}^{-1}}$ Il s'agit de l'inverse d'un temps.

$\boxed{[\alpha] = \left[\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{t}}\right] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}}$ Il s'agit d'une vitesse.

2) On rappelle :

$$\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2} = \sqrt{\mathrm{R}^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = \sqrt{\mathrm{R}^2}$$

et

$$\tan(\theta) = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \tan(\omega t)$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{r}(t) = \mathrm{R} \\ \theta(t) = \omega t \\ \mathrm{z}(t) = \alpha\, t \end{cases}}$$

3) Le point se déplace à la surface d'un cylindre (car r est constant). L'angle et l'altitude croissent linéairement avec le temps. Cette courbe s'appelle **une hélice**.

4) En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{R}\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + \mathrm{R}\sin(\omega t)\,\vec{e}_y + \alpha t\,\vec{e}_z\right) \\ &= -\mathrm{R}\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x + \mathrm{R}\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y + \alpha\,\vec{e}_z \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques, on rappelle que l'on a :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta = \cos(\omega t)\,\vec{e}_r - \sin(\omega t)\,\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y &= \cos(\theta)\,\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\,\vec{e}_r = \cos(\omega t)\,\vec{e}_\theta + \sin(\omega t)\,\vec{e}_r \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ dans l'expression de la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -\mathrm{R}\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x + \mathrm{R}\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y + \alpha\,\vec{e}_z \\ &= -\mathrm{R}\omega\sin(\omega t)\,[\cos(\omega t)\,\vec{e}_r - \sin(\omega t)\,\vec{e}_\theta] \\ &\quad +\mathrm{R}\omega\cos(\omega t)\,[\cos(\omega t)\,\vec{e}_\theta + \sin(\omega t)\,\vec{e}_r] + \alpha\,\vec{e}_z \\ &= \mathrm{R}\omega\,[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]\,\vec{e}_\theta + \alpha\,\vec{e}_z \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{v} = -\mathrm{R}\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_x + \mathrm{R}\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_y + \alpha\,\vec{e}_z = \mathrm{R}\omega\,\vec{e}_\theta + \alpha\,\vec{e}_z}$$

Sa norme vaut :

$$\boxed{v = \sqrt{\mathrm{R}^2\omega^2 + \alpha^2}}$$

Exercice n°4 - Cardioïde ★★☆

1) On sait que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r\,\vec{e}_r = \frac{a}{2}(1 + \cos(\theta))\,\vec{e}_r$$

De plus,

$$\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y$$

Donc (avec $\theta = \omega t$) :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \dfrac{a}{2}(1 + \cos(\omega t))\cos(\omega t) \\ y(t) = \dfrac{a}{2}(1 + \cos(\omega t))\sin(\omega t) \end{cases}}$$

2) Dans la base polaire :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\omega\,\vec{e}_\theta = \boxed{\begin{pmatrix} -\dfrac{a\omega}{2}\sin(\omega t) \\ \dfrac{a\omega}{2}(1 + \cos(\omega t)) \end{pmatrix}}$$

Dans la base cartésienne :

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{2}[-\omega\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t) + (1 + \cos(\omega t))\cdot(-\omega\sin(\omega t))] \\ \dfrac{a}{2}[-\omega\sin(\omega t)\cdot\sin(\omega t) + (1 + \cos(\omega t))\cdot(\omega\cos(\omega t))] \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y = \boxed{\begin{pmatrix} -\dfrac{a\omega}{2}[1+2\cos(\omega t)]\cdot\sin(\omega t) \\ \dfrac{a\omega}{2}[-\sin^2(\omega t)+\cos(\omega t)+\cos^2(\omega t)] \end{pmatrix}}$$

<u>Remarque</u> :
On peut vérifier que :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\big(\cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y\big) + r\omega\big(\cos(\theta)\,\vec{e}_y - \sin(\theta)\,\vec{e}_x\big)$$

Donc, dans la base cartésienne :

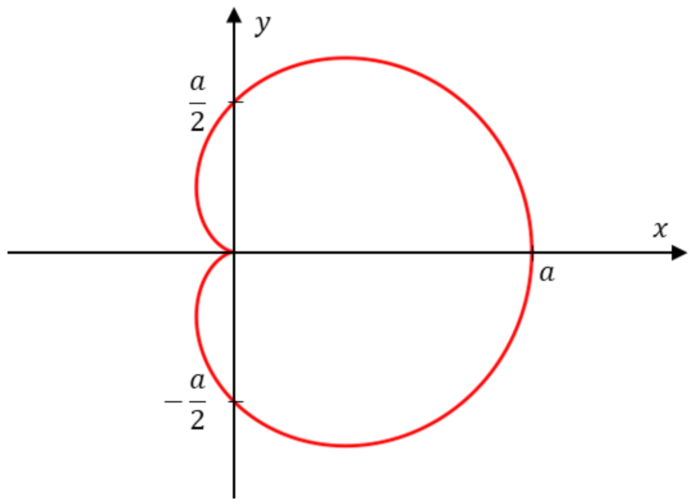
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a\omega}{2}\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t) - \dfrac{a}{2}[1+\cos(\omega t)]\omega\sin(\omega t) \\ -\dfrac{a\omega}{2}\sin(\omega t)\cdot\sin(\omega t) + \dfrac{a}{2}[1+\cos(\omega t)]\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

On retrouve bien la même expression.

3) Norme :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \frac{a\omega}{2}\sqrt{\sin^2(\omega t) + (1+\cos(\omega t))^2} = \boxed{a\omega\sqrt{\frac{1+\cos(\omega t)}{2}}}$$

4) Trajectoire :



Exercice n°5 - Mouvement d'un ballon-sonde avec vent latéral ★☆☆

1) La vitesse vaut :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = v_0 \\ \dot{x}(t) = \dfrac{z}{\tau} \end{cases}$$

On en déduit la position du ballon :

$$\begin{cases} z(t) = \displaystyle\int_0^t v_0\,dt = \boxed{v_0 t} \\ x(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{z}{\tau}\,dt = \int_0^t \frac{v_0 t}{\tau}\,dt = \boxed{\dfrac{v_0}{2\tau}t^2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{x = \frac{z^2}{2v_0\tau}}$$

Il s'agit d'une parabole.

2) On dérive deux fois le vecteur position pour obtenir le vecteur accélération :

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = 0 \\ \ddot{x}(t) = \dfrac{v_0}{\tau} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\vec{a} = \frac{v_0}{\tau}\,\vec{e}_x}$

Exercice n°6 - Mouvements d'un planeur ★☆☆

1) On rappelle que l'évolution de la norme du vecteur vitesse est liée à la composante normale du vecteur accélération.

Comme dans le cours, notons $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire en P et $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal à la trajectoire en P, dirigé dans le sens de la concavité (« vers l'intérieur » de la trajectoire). Alors :

$$\frac{dv}{dt} = \vec{a}\cdot\vec{T}$$

Dans la position (1) :

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{T} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{La norme du vecteur vitesse diminue}}$$

Dans la position (2) :

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{T} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{La norme du vecteur vitesse augmente}}$$

Dans la position (3) :

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{La norme du vecteur vitesse est constante}}$$

2) Voir cours, on a :

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

Exercice n°7 - Course de voiture ★★☆

1) Button parcourt un demi-cercle de rayon R_B.

$$\boxed{D_B = \pi R_B = 282{,}8\ \mathrm{m}}$$

Alonso parcourt un demi-cercle de rayon R_A, plus deux fois la distance $(R_B - R_A)$

$$\boxed{D_A = \pi R_A + 2(R_B - R_A) = 265{,}6\ \mathrm{m}}$$

Alonso parcourt une distance plus petite, mais on ne peut rien conclure sur la trajectoire optimale car c'est le temps de parcours qui compte.

2) On rappelle l'expression de la vitesse d'un système sur une trajectoire circulaire :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = R\omega\,\vec{e}_\theta$$

Puisque cette vitesse est constante, on a : $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$. Ainsi, l'accélération vaut :

$$\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{e}_r = \overrightarrow{\text{cte}}$$

On en déduit que :

$$a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{aR}}$$

Pour une accélération de $0{,}8\ g = 7{,}85\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, on en déduit :

$$\boxed{v_B = 26{,}58\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}} \qquad \boxed{v_A = 24{,}26\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

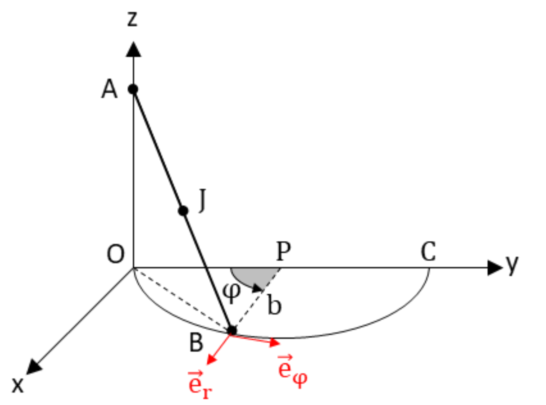
3) On en déduit simplement le temps de parcourt par : $t = D/v$:

$$\boxed{t_A = 10{,}95\ \mathrm{s}} \qquad \boxed{t_B = 10{,}63\ \mathrm{s}}$$

C'est finalement la trajectoire de Button qui est la meilleure.

Exercice n°8 - Chute guidée d'un bâton ★★★

1) La base polaire décrite dans l'énoncé est la suivante :



2) On a :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = -\cos(\varphi)\ \vec{e}_y + \sin(\varphi)\ \vec{e}_x \\ \vec{e}_\varphi = \cos(\varphi)\ \vec{e}_x + \sin(\varphi)\ \vec{e}_y \end{cases}$$

3) La vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

C'est une constante. En intégrant, on obtient la formule ci-dessous. Le temps total est ainsi obtenu lorsque $\varphi = \pi$.

$$\int_0^\varphi d\varphi = \omega \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega t \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{\pi}{\omega}}$$

4) Vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{PB} = b\,\vec{e}_r}$$

On dérive ce vecteur pour obtenir la vitesse.

$$\boxed{\vec{v}_B = \frac{d\overrightarrow{PB}}{dt} = b\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = b\omega\,\vec{e}_\varphi}$$

On dérive ce vecteur pour obtenir l'accélération.

$$\boxed{\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = b\omega(-\dot{\varphi}\vec{e}_r) = -b\omega^2\,\vec{e}_r}$$

5) On sait que :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = b\,\vec{e}_y + b\,\vec{e}_r = b\,\vec{e}_y + b\left(\sin(\varphi)\,\vec{e}_x - \cos(\varphi)\,\vec{e}_y\right)$$
$$= b\left[\sin(\varphi)\ \vec{e}_x + (1-\cos(\varphi))\,\vec{e}_y\right]$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} x_B(t) = b\ \sin(\omega t) \\ y_B(t) = b\,(1-\cos(\omega t)) \end{cases}}$$

6) Le point J étant à mi-distance entre A et B, on a :

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x_J(t) = \dfrac{x_A(t)+x_B(t)}{2} = \dfrac{x_B(t)}{2} = \dfrac{b}{2}\sin(\omega t) \\ y_J(t) = \dfrac{y_A(t)+y_B(t)}{2} = \dfrac{y_B(t)}{2} = \dfrac{b}{2}\ (1-\cos(\omega t)) \end{cases}}$$

Avant de déterminer la distance $z_J(t)$, déterminons dans un premier temps $z_A(t)$ à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} z_A(t) &= \sqrt{(2b)^2 - OB^2} \\ &= \sqrt{4b^2 - (x_B^2 + y_B^2)} \\ &= \sqrt{4b^2 - b^2(\sin^2(\omega t) + (1-\cos(\omega t))^2)} && \rightarrow \text{ On développe le } (1-\cos(\omega t))^2 \\ &= b\sqrt{4 - (\sin^2(\omega t) + 1 + \cos^2(\omega t) - 2\cos(\omega t))} && \rightarrow \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_A(t) &= b\sqrt{4 - 2(1-\cos(\omega t))} && \rightarrow \text{ On utilise le formulaire} \\ &= b\sqrt{4 - 4\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)} && \rightarrow 1 - \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \\ &= 2b\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)} \\ &= 2b\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{z_J(t) = \frac{z_A(t)}{2} = \ b\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)}$$

7) On calcule le vecteur vitesse dans la base cartésienne :

$$\vec{v}_J = \begin{pmatrix} \dfrac{b\omega}{2}\cos(\omega t) \\ \dfrac{b\omega}{2}\sin(\omega t) \\ \dfrac{b\omega}{2}\sin\left(\dfrac{\omega t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

On en déduit la norme au carré du vecteur :

$$v_J^2(t) = \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2\ \left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right) = \boxed{\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2\ \left(1 + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)}$$

8) On constate que $v_J^2(t)$, donc $v_J(t)$, augmente au cours du temps. Il s'agit donc d'un mouvement accéléré.

9) Par définition :

$$\begin{aligned} \langle v_J^2\rangle &= \boxed{\frac{1}{T}\int_0^T v_J^2(t)\,dt} \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2\int_0^T\left(1+\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)dt && \rightarrow \text{ On utilise le formulaire} \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2\int_0^T\left(1+\frac{1-\cos(\omega t)}{2}\right)dt \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2\int_0^T\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos(\omega t)\right)dt && \rightarrow \text{ On intègre} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle v_J^2\rangle &= \frac{1}{T}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2\left[\frac{3T}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin(\omega T)\right] && \rightarrow \text{ Rappel : } \omega T = \pi \\ &= \boxed{\frac{3}{2}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2} \end{aligned}$$