Mécanique classique | Chapitre 2 | TD (M2)

Exercice n°1 - Centre de masse ★☆☆

On considère deux points matériels M_1 et M_2de masse respective $m_1 = 10$ kg et $m_2 = 5$ kg. Déterminer la position du centre de masse.

Exercice n°2 - Frottement fluide ★★☆

On considère un point matériel M de masse m. Il est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sur un plan faisant un angle β avec l'horizontale dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. On considère de plus qu'il est soumis à une force de frottement fluide dont on peut modéliser l'action par : $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$.

On note (x, y) la base cartésienne alignée avec l'horizontale. On note (X, Z) la base cartésienne alignée avec la surface du plan incliné.

1) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $\dot{X}(t)$ et identifier un temps τ et une vitesse v_∞ caractéristiques du problème.

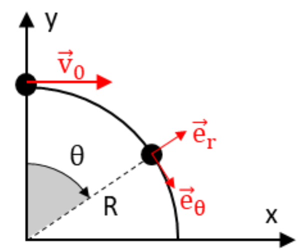
2) Résoudre l'ED et la tracer la solution.

3) Déterminer $X(t)$ sachant que $X(0) = 0$.

4) Déterminer l'expression du temps t_m correspondant à l'altitude maximale atteinte. Que vaut t_m si les frottements sont négligés ?

Exercice n°3 - Réaction normale du support ★★☆

On étudie le mouvement d'un enfant esquimau, assimilé à un point matériel M de masse m qui glisse sans frottement sur un Igloo de rayon R. Il part avec une vitesse v_0 depuis le sommet de l'igloo.



1) L'enfant est soumis à deux forces, lesquelles ?

2) Appliquer le PFD sur l'enfant dans la base polaire. Identifier l'équation du mouvement. Quelle information l'autre équation contient-elle ?

Il n'est pas possible de résoudre l'équation du mouvement. En revanche, on peut tout de même s'en servir pour résoudre l'autre équation, portant sur la réaction normale de l'igloo.

3) Multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, puis intégrer entre l'instant initial et un instant t quelconque. Montrer que :

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g(1 - \cos(\theta))$$

4) En déduire l'expression de la norme de la force de réaction normale de l'igloo.

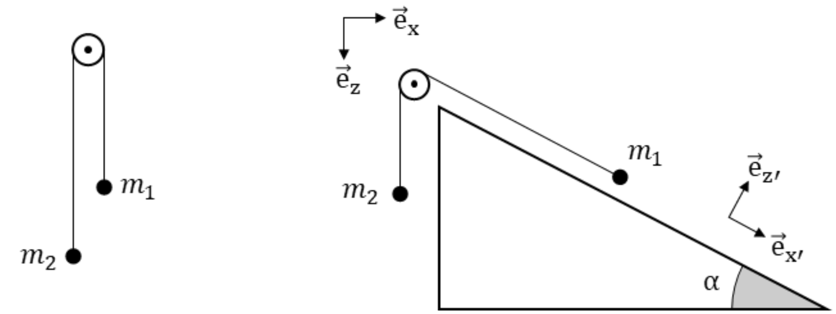
5) Déterminer l'angle θ_c où l'enfant décolle de l'igloo.

Exercice n°4 - Poulie et contre-poids ★★☆

On considère deux masses, m_1 et m_2. L'objectif est de déterminer l'accélération de la masse m_1. On néglige toute source de frottement.

Le fil reliant les deux masses est sans masse et inextensible.

La poulie est supposée parfaite, c'est-à-dire qu'elle permet de modifier le sens d'une force, sans en changer sa norme.



Situation de gauche.

1) Dessiner sur le schéma toutes les forces s'exerçant sur les 2 masses et sur le fil.

2) Appliquer le PFD sur la masse 1. Appliquer le PFD sur la masse 2. Appliquer le PFD sur le système {masse 1, masse 2}.

3) En utilisant le caractère inextensible du fil et le caractère parfait de la poulie, déterminer l'équation différentielle vérifiée par z_1, l'altitude de la masse 1.

4) La résoudre. À quelle condition le système reste immobile ?

Situation de droite

5) Reprendre les mêmes questions dans la situation de droite.

Exercice n°5 - Poussée d'Archimède et ED adimensionnée ★★☆

On cherche à mesurer la viscosité η d'un fluide. Pour cela, on lâche une bille en acier de rayon $r = 4{,}8\ mm$, assimilée à un point matériel B de masse $m = 4{,}08\ g$, dans une éprouvette remplie du fluide étudié (ici un mélange glycérine-eau de masse volumique $\rho = 1260\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{m}^{-3}$).

On note (Oz) l'axe vertical descendant avec l'origine située à la position à laquelle on lâche la bille.

La force de frottement fluide exercée par le fluide sur la bille s'écrit :

$$\vec{f} = -6\pi\eta\mathrm{r}\,\vec{\mathrm{v}}$$

et la poussée d'Archimède ne sera pas négligée.

1) Quelle est la dimension de η.

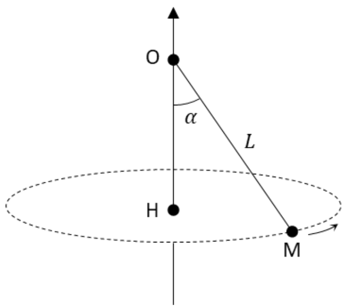
2) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\dot{\mathrm{z}}$.

3) Écrire cette ED sous forme adimensionnée.

4) Donner la solution de l'ED adimensionnée.

Exercice n°6 - Étude d'un pendule ★★☆

On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible, de longueur L, de masse négligeable, fixé en O et auquel on a accroché une petite bille de masse m assimilable à un point matériel M. O est fixe dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ galiléen.



Un enfant fait tourner le pendule de manière à ce que le masse effectue un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω le plan (xOy). Le fil OM garde une inclinaison constante $\alpha > 0$ par rapport à la verticale au cours du mouvement.

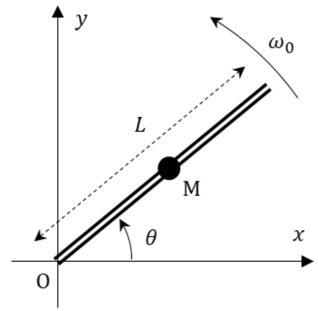
1) On se place en coordonnées cylindriques (origine au point O, axe vertical vers le haut). Faire un schéma du problème pour situer les différentes notations.

2) Appliquer le PFD. En déduire une relation entre ω, L, g et α.

3) Montrer que la vitesse angulaire est forcément supérieure à une certaine valeur ω_c.

Exercice n°7 - Rail en rotation ★★☆

Un rail de longueur L, tourne autour d'un point O fixe, dans un plan horizontal, à la vitesse angulaire ω_0 constante. On place sur ce rail une petite bille M, de masse m, qui peut se déplacer sans frottements uniquement dans la direction du rail.



1) La bille est placée à l'instant initial, sans vitesse, à la distance $d < L$ ($d > 0$) du point O. Déterminer $\overrightarrow{OM}(t)$.

On attache maintenant la bille à un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est fixée en O.

2) Montrer que la bille peut effectuer des oscillations harmoniques dans le tube, autour d'une position d'équilibre r_{eq}, sous réserve que la raideur du ressort obéisse à une condition à préciser. Déterminer r_{eq} et la pulsation des oscillations.

Éléments de réponse

❶ $\overrightarrow{\mathrm{M_1G}} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$. ❷ 1) $\frac{d\dot{\mathrm{X}}}{dt} + \frac{\dot{\mathrm{X}}}{m/\alpha} = -g\sin(\beta)$. Ainsi : $\tau = \frac{m}{\alpha}$ et $\mathrm{v}_\infty = -\tau g\sin(\beta)$. 2) $\dot{\mathrm{X}}(t) = (\mathrm{v}_0 - \mathrm{v}_\infty)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \mathrm{v}_\infty$. 3) $\mathrm{X(t)} = \tau(\mathrm{v}_0 - \mathrm{v}_\infty)\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] + \mathrm{v}_\infty t$. 4) $t_m(\alpha) = \tau \cdot \ln\left(1 - \frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{v}_\infty}\right)$ et $t_m(\alpha = 0) = \frac{\mathrm{v}_0}{g\sin(\beta)}$. ❸ 1) $\vec{\mathrm{P}}$ et $\vec{\mathrm{N}}$. 2) $-\mathrm{mR}\dot{\theta}^2 = -\mathrm{mg}\cos(\theta) + \mathrm{N}$ et $\mathrm{mR}\ddot{\theta} = \mathrm{mg}\sin(\theta)$. 3) $\mathrm{R}\dot{\theta}^2 = \frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{R}} + 2\mathrm{g}(1 - \cos(\theta))$. 4) $\mathrm{N} = \mathrm{m}\left(-\frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{R}} + \mathrm{g}(3\cos(\theta) - 2)\right)$. 5) $\cos(\theta_c) = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{gR}} + 2\right)$. ❹ 2) $m_1\ddot{z}_1\,\vec{e}_z = \vec{P}_1 + \vec{T}_1$ et $m_2\ddot{z}_2\,\vec{e}_z = \vec{P}_2 + \vec{T}_2$. 3) $\ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g$. 4) $z_1 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g\,t^2$. 5) $\frac{d^2x_1'}{dt^2} = \frac{m_1\sin(\alpha) - m_2}{m_1 + m_2}\,g$. ❺ 1) $[\eta] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-1}$. 2) $\frac{\mathrm{d}\dot{\mathrm{z}}}{\mathrm{dt}} + \frac{\dot{\mathrm{z}}}{\tau} = \mathrm{a}_0$ avec $\tau = \frac{\mathrm{m}}{6\pi\eta\mathrm{r}}$ et $\mathrm{a}_0 = \mathrm{g}\left(1 - \frac{\rho\mathrm{V_{bille}}}{\mathrm{m}}\right)$. 3) $\frac{d\tilde{\mathrm{v}}}{d\tilde{t}} + \tilde{\mathrm{v}} = 1$ et $\tilde{\mathrm{v}} = 1 - \exp(-\tilde{t})$, avec $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$ et $\tilde{\mathrm{v}} = \frac{\dot{\mathrm{z}}}{\tau a_0}$. ❻ 2) $\cos(\alpha) = \frac{g}{\mathrm{L}\omega^2}$. 3) $> \omega_c = \sqrt{\frac{g}{L}}$. ❼ 1) $r(t) = d\ ch(\omega_0 t)$. 2) $\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)r = \frac{k}{m}\ell_0$. Donc : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega_0^2}$ et $r_{eq} = \frac{k/m}{k/m - \omega_0^2}\ell_0$.