Mécanique classique | Chapitre 2 | Correction TD (M2)

Exercice n°1 - Centre de masse ★☆☆

On rappelle la formule du centre de masse :

$$(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\mathrm{m}_1\overrightarrow{\mathrm{OM}_1}+\mathrm{m}_2\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}$$

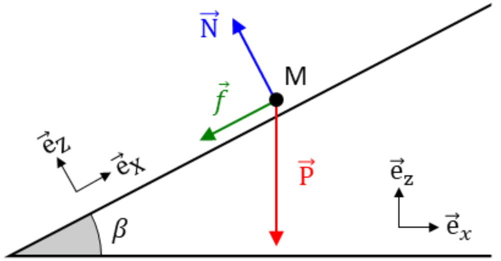
Avec O un point quelconque. On applique cette formule pour $\mathrm{O}=\mathrm{M}_1$. Ainsi :

$$(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{G}}=\mathrm{m}_2\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{G}}=\frac{\mathrm{m}_2}{\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2}\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}}$$

Le centre de masse G se situe sur le segment $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$, à $1/3$ de la distance $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ en partant de M_1.

Exercice n°2 - Réaction normale du support ★★☆

1)



Le système est soumis à 3 forces

$\vec{\mathrm{P}}=-mg\,\vec{e}_z=mg(-\cos(\beta)\,\vec{e}_{\mathrm{Z}}-\sin(\beta)\,\vec{e}_{\mathrm{X}})$

$\vec{\mathrm{N}}=\mathrm{N}\,\vec{e}_{\mathrm{Z}}$

$\vec{f}=-\alpha\,\vec{\mathrm{v}}=-\alpha\dot{\mathrm{X}}\,\vec{e}_{\mathrm{X}}$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement :

$$m\,\ddot{\mathrm{X}}\,\vec{e}_{\mathrm{X}}=mg(-\cos(\beta)\,\vec{e}_{\mathrm{Z}}-\sin(\beta)\,\vec{e}_{\mathrm{X}})+\mathrm{N}\,\vec{e}_{\mathrm{Z}}-\alpha\dot{\mathrm{X}}\,\vec{e}_{\mathrm{X}}$$

On projette selon $\vec{e}_{\mathrm{X}}$.

$$m\ddot{\mathrm{X}}=-mg\sin(\beta)-\alpha\dot{\mathrm{X}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{d\dot{\mathrm{X}}}{dt}+\frac{\dot{\mathrm{X}}}{m/\alpha}=-g\sin(\beta)}$$

On pose donc : $\boxed{\tau=\frac{m}{\alpha}}$ et $\boxed{\mathrm{v}_\infty=-\frac{mg}{\alpha}\sin(\beta)=-\tau g\sin(\beta)}$.

2) La solution de l'ED est :

$$\boxed{\dot{\mathrm{X}}(t)=(\mathrm{v}_0-\mathrm{v}_\infty)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+\mathrm{v}_\infty}$$

<u>Graphe</u> : exponentielle décroissante allant de $\mathrm{v}_0>0$ à $\mathrm{v}_\infty<0$.

3) Prenons la primitive de $\dot{\mathrm{X}}(t)$ tel que $X(0)=0$.

$$\boxed{\mathrm{X(t)}=\tau(\mathrm{v}_0-\mathrm{v}_\infty)\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]+\mathrm{v}_\infty t}$$

4) L'altitude maximale est atteinte lorsque $\dot{\mathrm{X}}(t)=0$.

Ainsi :

$$0=(\mathrm{v}_0-\mathrm{v}_\infty)\exp\left(-\frac{t_m}{\tau}\right)+\mathrm{v}_\infty \quad\Rightarrow\quad \boxed{t_m(\alpha)=\tau\cdot\ln\left(1-\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{v}_\infty}\right)}$$

En l'absence de frottement, $\alpha=0$. Ainsi :

$$\frac{d\dot{\mathrm{X}}}{dt}=-g\sin(\beta) \quad\Rightarrow\quad \dot{\mathrm{X}}(t)=\mathrm{v}_0-g\sin(\beta)\,t \quad\Rightarrow\quad \boxed{t_m(\alpha=0)=\frac{\mathrm{v}_0}{g\sin(\beta)}}$$

<u>Remarque</u> : on peut aussi prendre la limite de $t_m(\alpha)$ (attention aux erreurs !)

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}t_m(\alpha)=\frac{\mathrm{v}_0}{g\sin(\beta)}}$$

Exercice n°3 - Réaction normale du support ★★☆

1) Son poids et la réaction normale de l'igloo.

2) On applique le PFD sur l'esquimau dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On a :

$$\mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}=\vec{\mathrm{P}}+\vec{\mathrm{N}}$$

Or,

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{N}}&=\mathrm{N}\,\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}\\ \vec{\mathrm{P}}&=\mathrm{mg}(-\cos(\theta)\,\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}+\sin(\theta)\,\vec{\mathrm{e}}_\theta)\\ \vec{\mathrm{a}}&=-\mathrm{R}\dot{\theta}^2\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}+\mathrm{R}\ddot{\theta}\vec{\mathrm{e}}_\theta\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} -\mathrm{mR}\dot{\theta}^2 = -\mathrm{mg}\cos(\theta) + \mathrm{N} \\ \mathrm{mR}\ddot{\theta} = \mathrm{mg}\sin(\theta) \end{cases}}$$

La seconde équation est l'équation du mouvement. La première permet de trouve N, connaissant θ.

3) On multiplie la deuxième équation par $\dot{\theta}$ et on intègre. On obtient :

$$\int_0^t \mathrm{mR}\dot{\theta}\ddot{\theta}\,\mathrm{dt} = \int_0^t \mathrm{mg}\dot{\theta}\sin(\theta)\,\mathrm{dt}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}\mathrm{mR}\dot{\theta}^2\right]_0^t = [-\mathrm{mg}\cos(\theta)]_0^t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{mR}\left(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2\right) = -\mathrm{mg}(\cos(\theta) - 1)$$

Or, on a :

$$\mathrm{v}_0 = \mathrm{R}\dot{\theta}_0$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}\mathrm{R}\left(\dot{\theta}^2 - \left(\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{R}}\right)^2\right) = \mathrm{g}(1 - \cos(\theta))$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{R}\dot{\theta}^2 = \frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{R}} + 2\mathrm{g}(1 - \cos(\theta))}$$

4) On en déduit l'expression de la force de réaction de l'igloo.

$$-\mathrm{mR}\dot{\theta}^2 = -\mathrm{mg}\cos(\theta) + \mathrm{N}$$

$$\Rightarrow \mathrm{N} = \mathrm{mg}\cos(\theta) - \mathrm{m}\left(\frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{R}} + 2\mathrm{g}(1 - \cos(\theta))\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{N} = \mathrm{m}\left(-\frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{R}} + \mathrm{g}(3\cos(\theta) - 2)\right)}$$

5) Lorsque l'enfant quitte l'igloo, la force de réaction normale est nulle. Ainsi,

$$0 = -\frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{R}} + \mathrm{g}(3\cos(\theta_c) - 2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta_c) = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{gR}} + 2\right)}$$

Exercice n°4 - Poulie et contre-poids ★★☆

1) Voir schéma.

2) PFD sur la masse 1 :

$$\boxed{m_1\ddot{z}_1\,\vec{e}_z = \vec{P}_1 + \vec{T}_1}$$

PFD sur la masse 2 :

$$\boxed{m_2\ddot{z}_2\,\vec{e}_z = \vec{P}_2 + \vec{T}_2}$$

PFD sur le système {masse 1, masse 2} :

$$\boxed{(m_1\ddot{z}_1 + m_2\ddot{z}_2)\,\vec{e}_z = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{P}_2 + \vec{T}_2}$$

3) Notons $z = 0$ l'origine de l'axe z au niveau de la poulie. Ainsi :

$$\boxed{L = z_1 + z_2}$$

On en déduit : $\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$.

Le caractère parfait de la poulie donne : $\boxed{\vec{T}_1 = \vec{T}_2}$ (norme inchangée). À l'aide de la question n°1, on en déduit de plus :

$$\vec{T}_1 = m_1\ddot{z}_1\,\vec{e}_z - \vec{P}_1$$

Finalement, le PFD sur la masse 2 devient :

$$-m_2\,\ddot{z}_1 = m_2 g + (m_1\ddot{z}_1 - m_1 g)$$

On en déduit l'ED :

$$\boxed{\ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g}$$

4) C'est une ED de type chute libre.

$$\boxed{z_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g\,t^2}$$

Le système est immobile si $\boxed{m_1 = m_2}$.

5) PFD sur la masse 1 :

$$\boxed{m_1\frac{d^2x_1'}{dt^2}\,\vec{e}_{x'} = \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1}$$

PFD sur la masse 2 :

$$\boxed{m_2\frac{d^2z_2}{dt^2}\,\vec{e}_z = \vec{P}_2 + \vec{T}_2}$$

PFD sur le système {masse 1, masse 2} :

$$\boxed{m_1 \frac{d^2 x_1'}{dt^2}\,\vec{e}_{x'} + m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2}\,\vec{e}_z = \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{P}_2 + \vec{T}_2}$$

Notons $z = 0$ l'origine de l'axe z au niveau de la poulie. Ainsi :

$$\boxed{L = x_1' + z_2}$$

On en déduit : $\frac{d^2 x_1'}{dt^2} + \frac{d^2 z_2}{dt^2} = 0$.

Le caractère parfait de la poulie donne : $\boxed{\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|}$ (norme inchangée). À l'aide de la question n°1, on en déduit de plus :

$$\vec{T}_1 = m_1 \frac{d^2 x_1'}{dt^2}\,\vec{e}_{x'} - \vec{P}_1 - \vec{N}_1 = -\|\vec{T}_1\|\,\vec{e}_{x'}$$

En projetant l'équation sur x', on obtient :

$$\boxed{-\|\vec{T}_1\| = m_1 \frac{d^2 x_1'}{dt^2} - m_1 g \sin(\alpha)}$$

Finalement, le PFD sur la masse 2 devient :

$$-m_2 \frac{d^2 x_1'}{dt^2}\,\vec{e}_z = m_2 g\,\vec{e}_z - \|\vec{T}_1\|\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad -m_2 \frac{d^2 x_1'}{dt^2} = m_2 g + m_1 \frac{d^2 x_1'}{dt^2} - m_1 g \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 x_1'}{dt^2} = \frac{m_1 \sin(\alpha) - m_2}{m_1 + m_2}\, g}$$

Conclusions :

- Si $\alpha = \pi/2$, on retrouve le cas précédent.
- Si $\alpha = 0$, la masse se met toujours en mouvement.
- Sinon, l'équilibre est atteint pour $\boxed{m_1 \sin(\alpha) = m_2}$

Exercice n°5 - Poussée d'Archimède et ED adimensionnée ★★☆

1) Par analyse dimensionnelle :

$$[f] = [\mathrm{ma}] = \mathrm{M \cdot L \cdot T^{-2}}$$

et

$$[\mathrm{rv}] = \mathrm{L} \times (\mathrm{L \cdot T^{-1}}) = \mathrm{L^2 \cdot T^{-1}}$$

Ainsi :

$$\boxed{[\eta] = \mathrm{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}}}$$

2) La masse est soumise à 3 forces :

- Le poids :

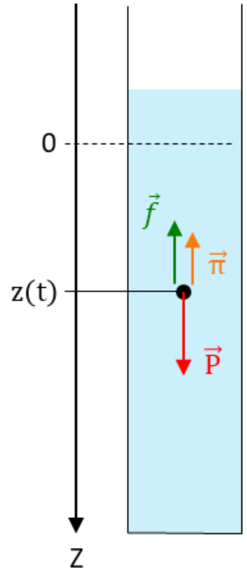
$$\vec{\mathrm{P}} = \mathrm{mg}\,\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$$

- La poussée d'Archimède :

$$\vec{\pi} = -\rho \mathrm{V_{bille}}\, \mathrm{g}\,\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$$

- La force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -6\pi\eta \mathrm{r}\,\dot{\mathrm{z}}\,\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$$



On applique le PFD à la bille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$\mathrm{m}\ddot{\mathrm{z}} = \mathrm{mg} - \rho \mathrm{V_{bille}}\mathrm{g} - 6\pi\eta\mathrm{r}\,\dot{\mathrm{z}}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\mathrm{z}} + \frac{6\pi\eta\mathrm{r}}{\mathrm{m}}\,\dot{\mathrm{z}} = \mathrm{g}\left(1 - \frac{\rho\mathrm{V_{bille}}}{\mathrm{m}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\dot{\mathrm{z}}}{\mathrm{dt}} + \frac{\dot{\mathrm{z}}}{\tau} = \mathrm{a}_0}$$

Avec :

$$\boxed{\tau = \frac{\mathrm{m}}{6\pi\eta\mathrm{r}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{a}_0 = \mathrm{g}\left(1 - \frac{\rho\mathrm{V_{bille}}}{\mathrm{m}}\right)}$$

3) On pose :

$$\tilde{t} = \frac{t}{\tau} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathrm{v}} = \frac{\dot{z}}{\tau a_0}$$

le temps adimensionné et la vitesse adimensionnée.

L'ED se réécrit sous la forme :

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mathrm{v}}}{d\tilde{t}} + \tilde{\mathrm{v}} = 1}$$

4) La solution de cette ED est :

$$\boxed{\tilde{\mathrm{v}} = 1 - \exp(-\tilde{t})}$$

Exercice n°6 - Étude d'un pendule ★★☆

1) Voir schéma.

2) <u>Forces</u> :

Poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z$

Tension du fil : $\vec{T} = T\,(\cos(\alpha)\,\vec{e}_z - \sin(\alpha)\,\vec{e}_r)$

<u>Coordonnées cylindriques</u> :

Position : $\overrightarrow{OM} = z\,\vec{e}_z + r\,\vec{e}_r$

Vitesse : $\vec{v} = \dot{z}\,\vec{e}_z + \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$. Or, $\dot{\theta} = \omega$, $z = cte$ et $r = L\sin(\alpha) = cte$. On en déduit : $\boxed{\vec{v} = L\sin(\alpha)\,\omega\,\vec{e}_\theta}$.

Accélération : $\boxed{\vec{a} = -L\sin(\alpha)\,\omega^2\,\vec{e}_r}$ car $\omega = cte$.

On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

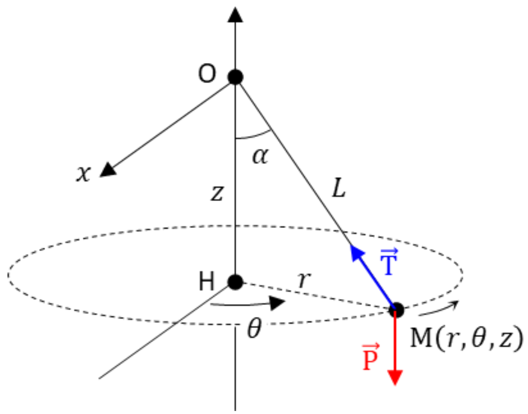
$$\begin{cases} \vec{e}_r & \rightarrow \quad -mL\sin(\alpha)\,\omega^2 = -T\sin(\alpha) \\ \vec{e}_z & \rightarrow \quad 0 = -mg + T\cos(\alpha) \end{cases}$$

On en déduit :

$$T = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2} > 0}$$

3) Cette équation est possible tant que :

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega > \omega_c = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$



Exercice n°7 - Rail en rotation ★★☆

1) En coordonnées polaires :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r} \quad \boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\omega_0\,\vec{e}_\theta} \quad \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega_0^2)\,\vec{e}_r}$$

La bille est soumise à son poids et la réaction normale du support qui compense toutes les forces selon $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$, afin que la bille ne se déplace que selon $\vec{e}_r$.

On applique le PFD sur la bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen que l'on projette sur $\vec{e}_r$.

$$m\ddot{r} - mr\omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{r} - \omega_0^2 r = 0}$$

La solution de l'ED est :

$$r(t) = A\,ch(\omega_0 t) + B\,sh(\omega_0 t)$$

Avec les CI :

$$\boxed{r(t) = d\,ch(\omega_0 t)}$$

2) On cherche donc le temps t_1 tel que :

$$\boxed{t_1 = \frac{\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{L}{d}\right)}{\omega_0}}$$

3) La bille est soumise à la force de rappel du ressort :

$$\vec{F} = -k(r - \ell_0)\,\vec{e}_r$$

Le PFD donne :

$$m\ddot{r} - mr\omega_0^2 = -k(r - \ell_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) r = \frac{k}{m}\ell_0}$$

Le système se comporte comme un oscillateur harmonique si $\boxed{\frac{k}{m} > \omega_0^2}$. Dans ce cas, il oscille à la pulsation $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega_0^2}}$ autour de la position d'équilibre :

$$\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) r_{eq} = \frac{k}{m}\ell_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{eq} = \frac{k/m}{k/m - \omega_0^2}\ell_0}$$