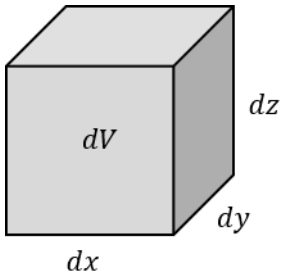
Chapitre MF1 – Statique des fluides

I) Équation de la statique des fluides

1) Particule de fluide

On découpe un fluide en une collection de volumes dV de taille mésoscopique, appelés **particules de fluide**. Un tel volume contient un grand nombre de particules, ce qui permet de définir des grandeurs intensives (ρ, P, T, etc.) tout en étant suffisamment petit pour permettre de rendre compte des variations des grandeurs ($\rho(\mathrm{M},t)$, $P(\mathrm{M},t)$, $T(\mathrm{M},t)$, $\vec{v}(\mathrm{M},t)$, etc.).



On appelle **champ** une grandeur définie en tout point de l'espace et du temps. Exemple : champ des vitesses $\vec{v}(\mathrm{M},t)$. Le champ est dit **uniforme** s'il ne dépend pas de l'espace et **stationnaire** s'il ne dépend pas du temps.

En **statique des fluides**, tous les champs sont stationnaires et le champ des vitesses est nul.

2) Force de volume

Définition :

Les **forces de volume** correspondent aux actions mécaniques de longue portée. Elles s'exercent sur le volume dV. Elles peuvent s'écrire comme le produit d'une **densité volumique de force** et du volume dV.

Exemple : poids

$$d\vec{F} = \delta m\,\vec{g} \quad \Rightarrow \quad d\vec{F} = \rho\,\vec{g}\;dV \quad \text{car :} \quad \rho = \frac{\delta m}{dV}$$

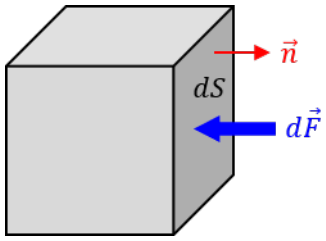
On en déduit la **densité volumique des forces de pesanteur** :

$$\boxed{\vec{F}_V = \frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\,\vec{g}}$$

3) Force de surface

Définition :

Les **forces de surface** correspondent aux actions mécaniques de contact. Elles s'exercent sur les différentes surfaces dS qui délimitent le volume dV.



Exemple : pression

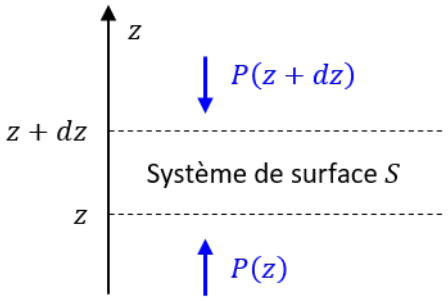
$$d\vec{F} = -P\vec{dS} = -PdS\,\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur.

Il est parfois possible de trouver un équivalent volumique aux forces de surface. C'est le cas pour la pression. Pour ce faire, on calcule la résultante des forces de pression et on montre qu'elle est proportionnelle au volume dV.

Application :

Soit une tranche de fluide de surface S et de hauteur dz. Par symétrie du problème, les forces latérales de pression se compensent. Ce n'est pas le cas selon l'axe z car le poids du fluide au-dessus du système, et donc la pression, dépend de l'altitude z du système.



On somme les forces de pression sur chaque interface (rappel : résultante nulle sur la surface latérale).

$$d\vec{F} = -P(z+dz)\,S\vec{u}_z + P(z)\,S\vec{u}_z = -\Big[P(z+dz) - P(z)\Big]S\vec{u}_z$$

$$= -dP\;S\vec{u}_z = -\frac{dP}{dz}\;dV\,\vec{u}_z \quad \text{avec :} \quad dV = Sdz$$

On trouve bien un équivalent volumique aux forces de pression, dans le cas où les pressions latérales se compensent :

$$\boxed{\overrightarrow{F_V} = \frac{d\overrightarrow{F}}{dV} = -\frac{dP}{dz}\overrightarrow{u_z}}$$

4) Équation fondamentale

On considère une particule de fluide de volume dV à l'équilibre mécanique. Le PFD donne (après division par dV) :

$$\overrightarrow{0} = \rho\overrightarrow{g} - \frac{dP}{dz}\overrightarrow{u_z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dP}{dz}\overrightarrow{u_z} = \rho\overrightarrow{g}}$$

On peut projeter sur l'axe $\overrightarrow{u_z}$. On obtient l'**équation fondamentale de la statique des fluides** :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dP}{dz} = -\rho g & \text{si l'axe (O}z\text{) vers le haut} \\ \dfrac{dP}{dz} = +\rho g & \text{si l'axe (O}z\text{) vers le bas} \end{cases}}$$

II) Applications

1) Cas d'un liquide incompressible et homogène

Hypothèses de travail :

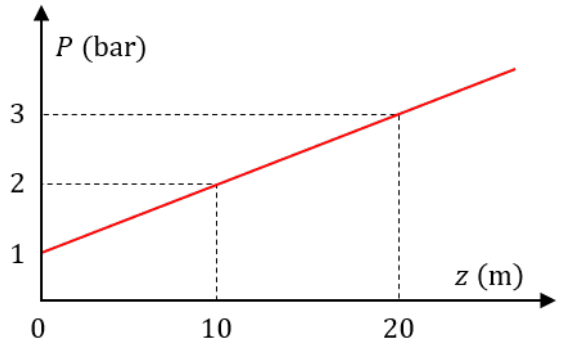
- Champ de pesanteur uniforme : $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{cte}$
- Fluide incompressible : ρ ne dépend ni de P, ni de T
- Fluide homogène : ρ ne dépend pas de la position M dans le liquide

La masse volumique est donc constante.

On repart de l'équation de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(z) = P_0 - \rho g z \quad \text{avec :} \quad P_0 = P(z=0)}$$

On en déduit le champ de pression (cas de la mer, par exemple). Prenons $\rho = 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3} et $g \simeq 10$ m $\cdot$ s^{-2}, alors : $\rho g \simeq 10^4$ Pa $\cdot$ m^{-1} $= 0{,}1$ bar $\cdot$ m^{-1}.



2) Cas d'un gaz : exemple de l'atmosphère isotherme

Hypothèses de travail :

- Champ de pesanteur uniforme : $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{cte}$
- L'atmosphère est un GP à température T constante

Exprimons ρ en fonction de T.

$$PV = nRT = \frac{mRT}{M} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

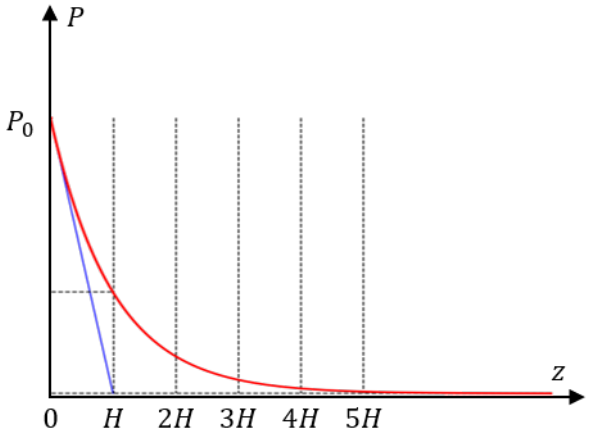
On repart de l'équation de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{gM}{RT}\,P \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dP}{dz} + \frac{P}{H} = 0 \quad \text{avec :} \quad H = \frac{RT}{gM} \simeq 8 \text{ km}}$$

H représente la hauteur caractéristique de décroissance de la pression.

Solution :

$$\boxed{P(z) = P_0\, e^{-z/H}}$$

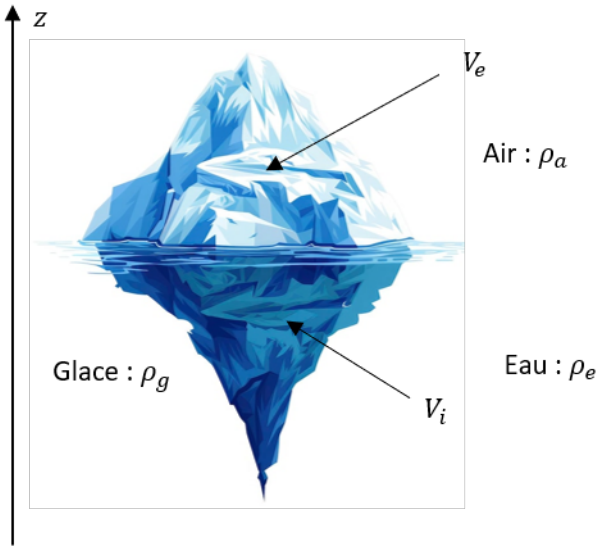


III) Poussée d'Archimède

La répartition non uniforme de la pression autour d'un corps partiellement ou totalement immergé est responsable de l'apparition d'une force résultante de poussée $\overrightarrow{\Pi}$ appelée poussée d'Archimède. Cette force est égale à l'opposée du poids du fluide déplacé par le corps immergé.

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = -\overrightarrow{P}_{\text{fluide déplacé}} = -m_{\text{fluide déplacé}} \times \overrightarrow{g} = -\rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{corps immergé}} \times \overrightarrow{g}}$$

Application : partie immergée d'un iceberg



Soit un iceberg de volume immergé V_i, de volume émergé V_e et de volume total $V = V_e + V_i$. Déterminons le pourcentage de volume immergé.

Données : $\rho_e = 1{,}00 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$; $\rho_g = 0{,}92 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$; $\rho_a = 1{,}3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$

On applique le PFD à l'équilibre :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{\Pi}_i + \overrightarrow{\Pi}_e \quad \Rightarrow \quad 0 = -\rho_g V g + \rho_e V_i g + \rho_a V_e g \quad \Rightarrow \quad 0 = -\rho_g V + \rho_e V_i + \rho_a (V - V_i)$$

On en déduit :

$$V\left(\rho_g - \rho_a\right) = V_i\left(\rho_e - \rho_a\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_g - \rho_a}{\rho_e - \rho_a} \simeq \frac{\rho_g}{\rho_e} = 0{,}92 = 92\ \%}$$

Remarque : attention ! ! !

Le théorème d'Archimède ne s'applique pas lorsqu'une partie du corps immergé n'est pas en contact avec le fluide, c'est par exemple le cas pour un objet posé au fond de l'eau (la surface inférieure de l'objet n'est pas en contact avec l'eau). Dans ce cas, il faut calculer à la main la résultante des forces de pression.