Optique géométrique | Chapitre 1 | Correction TD (O1)

Exercice n°1 - Couleur d'un laser ★☆☆

1) C'est un laser vert.

2) La longueur de l'onde lumineuse dans le plexiglas est :

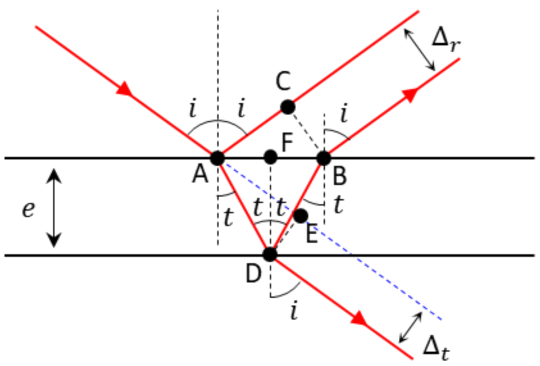
$$\lambda_{\text{plexiglas}} = \frac{\lambda_0}{\mathrm{n}} = \frac{520}{1{,}51} = \boxed{344\ \mathrm{nm}}$$

3) La couleur est donnée par la fréquence de l'onde ou sa longueur d'onde dans le vide, qui ne change au cours de la propagation. La couleur du laser ne change donc pas, elle reste verte.

Exercice n°2 - Lame à face parallèles ★★☆

1) Légendons tous les angles.

2)



Tous les angles des rayons à l'extérieur de la lame valent i et ceux à l'intérieur valent r. Les rayons sont donc bien parallèles.

3) Dans le triangle ABC, on a : $\cos(i) = \frac{\Delta_r}{AB}$

Dans le triangle ADF, on a : $\tan(r) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{AB/2}{e}$

Loi de Snell-Descartes : $\sin(i) = n\sin(t)$

Relation sin/cos ∀ θ : $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

On combine toutes ces relations :

$$\Delta_r = AB \cdot \cos(i) = 2e\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\cos(i) = 2e\frac{\sin(i)/n}{\sqrt{1-(\sin(i)/n)^2}}\cos(i)$$

Ainsi :

$$\boxed{\Delta_r = \frac{2e\sin(i)\cos(i)}{\sqrt{n^2-\sin^2(i)}} = 0{,}44\ \mathrm{mm}}$$

4) Dans le triangle ADE, on a : $\sin(i-t) = \frac{\Delta_t}{AD}$

Dans le triangle ADF, on a : $\cos(t) = \frac{e}{AD}$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Delta_t &= AD \cdot \sin(i-t) \\
&= \frac{e}{\cos(t)} \cdot (\sin(i)\cos(t) - \cos(i)\sin(t)) \\
&= e \cdot \left(\sin(i) - \cos(i)\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right) \\
&= e \cdot \left(\sin(i) - \cos(i)\frac{\sin(i)}{\sqrt{n^2-\sin^2(i)}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\Delta_t = e \cdot \sin(i)\left(1 - \frac{\cos(i)}{\sqrt{n^2-\sin^2(i)}}\right) = 0{,}12\ \mathrm{mm}}$$

Exercice n°3 - Réfraction par un hémi-cylindre ★★☆

1) On applique la deuxième loi de Snell-Descartes de la réfraction en J (l'angle de réfraction vaux $\pi/2$).

$$\mathrm{n}\sin(i) = 1$$

Dans le triangle IJC :

$$\sin(i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{R}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{d} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{n}}}$$

2) Dans les triangles CJA et CJI, on a :

$$\cos(i) = \frac{R}{CA} = \frac{IJ}{R}$$

De plus,

$$IJ = \sqrt{R^2 - d^2}$$

Ainsi,

$$CA = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - d^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \boxed{\frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}}$$

3) Il y a une réflexion totale dans l'hémi-cylindre.

Exercice n°4 - Réfractomètre de Pulfrich ★⯪☆

1) Puisqu'il faut une réflexion totale, le verre du réfractomètre doit être plus réfringent que le liquide.

$$\boxed{n < N}$$

2) On exprime la condition limite de réflexion totale en J :

$$N \sin(\beta) = n$$

À l'aide de la deuxième loi de Snell-Descartes de la réfraction exprimée en I, on a :

$$\sin(\alpha) = N \sin(r)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} n &= N \sin(\beta) = N \sin\left(\frac{\pi}{2} - r\right) = N \cos(r) \\ &= N\sqrt{1 - \sin^2(r)} = \boxed{\sqrt{N^2 - \sin^2(\alpha)}} \end{aligned}$$

Exercice n°5 - Prisme à réflexion totale ★★☆

1) Le rayon parvient en incidence normale sur la face supérieure, il n'est donc pas dévié à son entrée. Sur la première face inférieure l'incidence est $i = 45\,°$. La réflexion sera totale si $i > i_{lim}$ l'angle de réfraction limite défini par :

$$n \sin(i_{lim}) = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi :

$$i > i_{lim} \quad \Rightarrow \quad \sin(i) > \sin(i_{lim}) = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\sin(45\,°)} = \boxed{\sqrt{2} = n_{min}}$$

Dans ces conditions le rayon est complètement réfléchi et une construction géométrique assure qu'il se propage horizontalement jusqu'à la deuxième face inférieure. Il l'atteint avec le même angle de 45 ° et subit donc une réflexion totale qui le fait remonter verticalement jusqu'à la surface supérieure qu'il atteint en incidence normale et traverse donc sans déviation.

2) Les réflexions ne dépendent pas des indices, la trajectoire des rayons réfléchis n'est donc pas modifiée.

3) L'indice du milieu extérieur ayant changé, l'angle de réfraction limite change également. Cette fois :

$$n \sin(i_{lim}) = n_e \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Nous n'avons pas de réflexion totale. Ainsi :

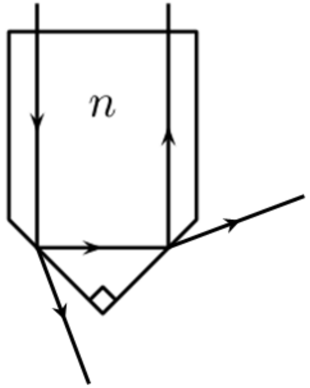
$$i < i_{lim} \quad \Rightarrow \quad \sin(i) < \sin(i_{lim}) = \frac{n_e}{n} \quad \Rightarrow \quad n < \frac{n_e}{\sin(45\,°)} \simeq \boxed{1{,}89 = n_{max}}$$

4) Il existe un rayon réfracté qui se rapproche de l'interface puisque l'indice du milieu incident est supérieur.

L'angle de déviation vaut :

$$\boxed{D = t - i = \arcsin\left(\frac{n}{n_e}\sin(i)\right) - i = 8{,}9\,° > 0}$$

Le rayon réfracté sur la deuxième face inférieur sera dévié du même angle mais vers le haut, toujours pour se rapprocher de l'interface.



5) Dans le cas où le prisme est plongé dans l'air, les réflexions totales assurent que l'intensité du rayon reste constante à chaque réflexion. À l'inverse il perd en intensité à chaque réflexion s'il existe un rayon réfracté.

La mesure de l'intensité du rayon qui ressort verticalement du prisme permet donc de détecter s'il est plongé dans l'eau ou dans l'air.

Exercice n°6 - Principe de Fermat ★★⯪

1) Le temps de trajet est la somme du temps mis par la lumière pour aller de A à I et de I à B. Ainsi,

$$t = \frac{AI}{c/n_1} + \frac{IB}{c/n_2} = \frac{n_1}{c}\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$

2) Pour minimiser ce temps par rapport à x, on cherche à annuler dt/dx.

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} = 0 &= \frac{n_1}{c}\frac{1}{2}\frac{2(x - x_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} + \frac{n_2}{c}\frac{1}{2}\frac{-2(x_B - x)}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}} \\ &= n_1\frac{x - x_A}{AI} - n_2\frac{x_B - x}{IB} \\ &= n_1\, sin(i_1) - n_2\, sin(i_2) \end{aligned}$$

On retrouve loi de Snell-Descartes de la réfraction :

$$\boxed{n_1\, sin(i_1) = n_2\, sin(i_2)}$$

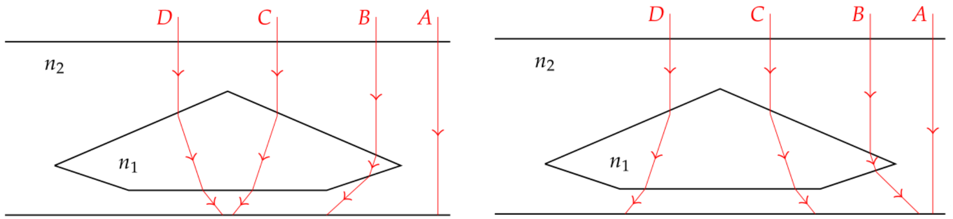
3) Le raisonnement est rigoureusement le même avec $\mathrm{n_1} = \mathrm{n_2}$. On en déduit :

$$\boxed{i_1 = i_1'}$$

Exercice n°7 - Identification de gemmes ★★☆

1) Lorsque l'on passe d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent, le rayon est dévié vers la normale. Dans le cas contraire, le rayon est dévié vers l'interface. Par conséquent :

Cas $\mathbf{n_2 < n_1}$ **Cas $\mathbf{n_2 > n_1}$**



2) Dans le cas $\mathrm{n_2 < n_1}$, on observera une zone plus lumineuse sous la pierre et une zone moins lumineuse sur les bords de la pierre.

Dans le cas $\mathrm{n_2 > n_1}$, on observera une zone plus lumineuse sur les bords de la pierre et une zone moins lumineuse sous la pierre

3) La moissanite est la seule pierre moins dense que l'iodure de méthylène, elle va donc flotter.

4) La pierre n°1 possède des contours plus clairs que son centre (nous n'avons pas étudier les arrêtes ici). Nous sommes donc dans le cas $\mathrm{n_2 > n_1}$. Il s'agit donc du verre Flint.

À l'inverse, la pierre n°2 possède des contours plus sombres que son centre. Nous sommes donc dans le cas $\mathrm{n_2 < n_1}$. Il s'agit donc du Zircon.

Exercice n°8 - Étude d'un arc en ciel ★★★

1) $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$

2) L'angle i_2 et maximal lorsque $i_1 = \pi/2$. Ainsi,

$$n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n_2 \sin(i_{2,max}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{2,max} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}$$

3) Non, il existe un angle limite. Voir démonstration de cours :

$$\boxed{i_{1,\mathrm{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$

4) La déviation vaut :

$$\boxed{D = i_2 - i_1}$$

Dans le cas où $i_2 = i_1$, la déviation est bien nulle.

5) On a :

$$\boxed{i = -r}$$

Il s'agit de la loi de la réflexion de Snell-Descartes.

6) On a :

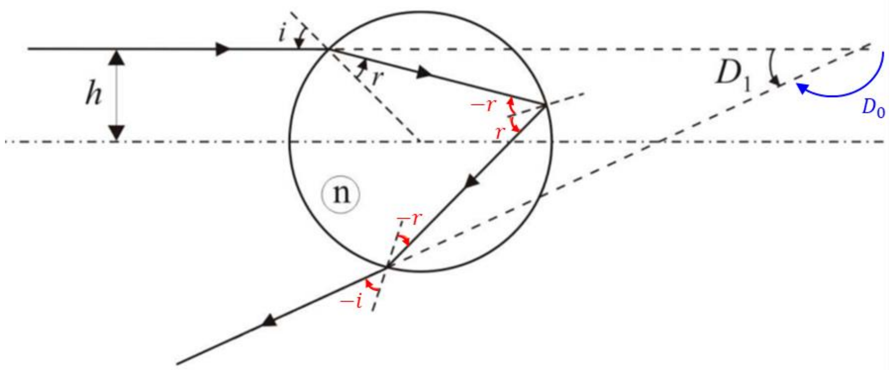
$$\boxed{D' = \pi - 2i}$$

Dans le cas où $i = 0$, la déviation vaut π. Dans le cas où $i = \pi/2$, la déviation vaut 0.

7) Tous les angles à l'intérieur de la goutte valent $\pm r$ (à orienter correctement) car les triangles sont isocèles. L'angle de sortie vaut $-i$.

8) La déviation D_0 est la somme de la déviation d'une réfraction, d'une réflexion et d'un autre réfraction.

$$D_0 = (r - i) + \big(\pi - 2\cdot(-r)\big) + \big((-i) - (-r)\big) = 4r - 2i + \pi$$



Or,

$$\boxed{D_1 = \pi + D_0 = 4r - 2i + 2\pi = (4r - 2i) \text{ modulo } 2\pi}$$

Si $i = 0$, alors $r = 0$. Le rayon est bien réfléchi sur lui-même ($D_1 = 0$).

9) On a :

$$\sin(i) = \frac{h}{R} = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \arcsin(x)}$$

De plus,

$$\sin(i) = n \sin(r) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)}$$

On en déduit :

$$\boxed{D_1 = 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right) - 2 \arcsin(x)}$$

10) Le maximum de cette fonction est obtenu pour :

$$\frac{dD_1}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{n\sqrt{1 - \left(\frac{x_m}{n}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x_m^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\,(1 - x_m^2) = \mathrm{n}^2 - x_m^2$$

$$\Rightarrow \quad 3\, x_m^2 = 4 - n^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}}$$

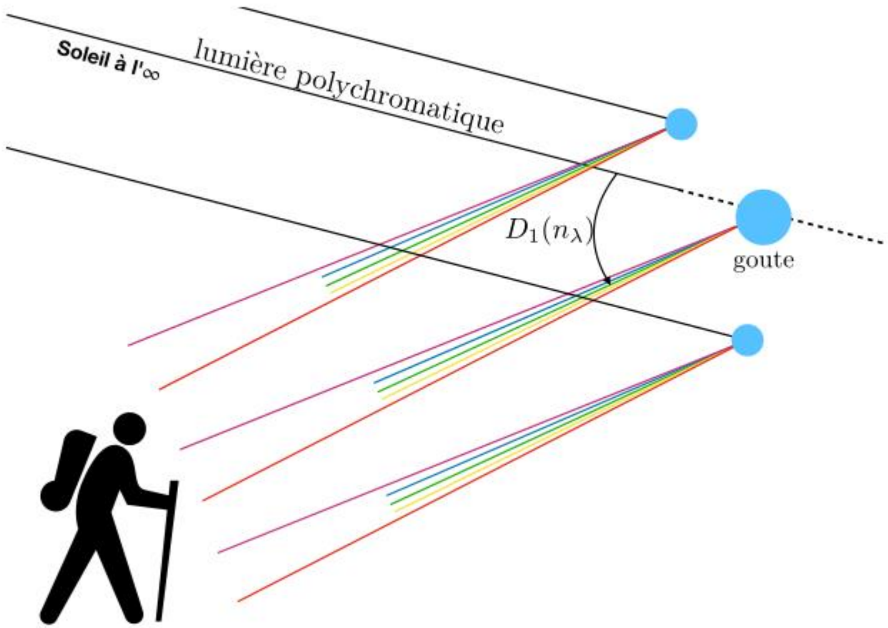
11) Application numérique :

$$\boxed{x_m = 0{,}86} \qquad \boxed{D_{1m} = 41{,}5\,°}$$

12) C'est un milieu dispersif.

13) On trouve $D_{1m,v} = 40{,}6\,°$ pour le violet et $D_{1m,r} = 42{,}4\,°$ pour le rouge soit un écart de $\boxed{1{,}8\,°}$.

14) La déviation calculée précédemment dépend de l'indice de réfraction, qui dépend lui-même de la longueur d'onde dans le vide de la radiation considéré. Différentes radiations seront ainsi déviées différemment.



En pratique, les rayons du soleil (à l'infini) arrivent tous sous le même angle et attaquent des gouttes de rayons différents sur toute une plage de hauteur allant de $x = -1$ à $x = +1$. A cause du phénomène de dispersion, les différentes radiations sont déviées sous différents angles, on note $D_{1m,max}$ la déviation maximale la plus importante (obtenue avec le rouge) et $D_{1m,min}$ la déviation maximale la plus petite (obtenue avec le violet).

On peut distinguer trois cas de figure :

- Pour un angle $D_1 > D_{1m,max}$, aucun rayon ne sont reçus après passage dans les gouttes. Sur l'image, cela se traduit par une zone sombre au-delà de l'arc rouge.
- Pour un angle $D_1 < D_{1m,min}$, plusieurs rayons sont reçus (et de couleurs différentes), l'œil effectue cependant une synthèse et perçoit une lumière

résultante blanche. Sur l'image, cela se traduit par une zone lumineuse blanchâtre à l'intérieur de l'arc violet.

- Pour un angle $D_{1m,min} < D_1 < D_{1m,max}$, seules certaines radiations peuvent parvenir à l'œil (presque toute pour $D_{1m,min}$ et seulement le rouge pour $D_{1m,max}$ (qui apparaît donc plus intensément que les autres couleurs).

La taille de la goutte n'aura donc pas d'influence, de même que sa position. En effet, deux gouttes vont renvoyer des rayons sous le même angle et ces rayons iront sur la même cellule photoréceptrice de l'œil. Finalement, on obtient un arc circulaire car l'observation du phénomène s'effectue toujours aux environs de $D_{1m} \simeq 42\,°$.