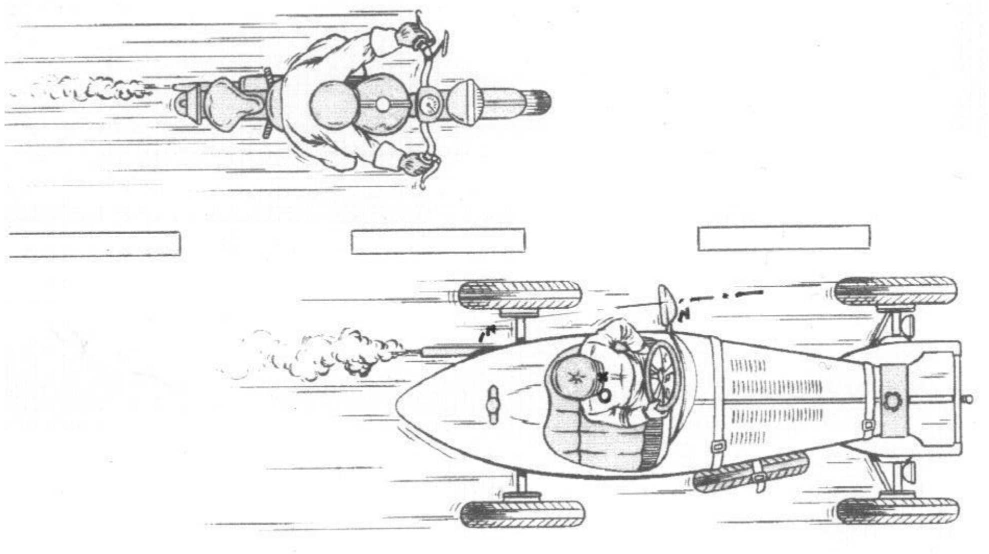
Optique géométrique | Chapitre 2 | TD (O2)

Exercice n°1 - Angle mort ★☆☆

On considère la situation ci-dessous.

Le rétroviseur est considéré comme un miroir plan, son axe optique est symbolisé par la droite en pointillé. Les yeux du conducteur sont représentés par le point O.

Le motard est-il vu dans le rétroviseur de l'automobiliste ?



Exercice n°2 - Taille du miroir ★⯪☆

Une personne mesure $\mathrm{L} = 1{,}80\ \mathrm{m}$ avec son chapeau. La distance de ses yeux au sol est de $1{,}60\ \mathrm{m}$. Il souhaite mettre sur le mur vertical un miroir pour s'y contempler entièrement.

Quelle doit être la taille minimale du miroir ? La distance entre l'homme et le mur importe-t-elle ?

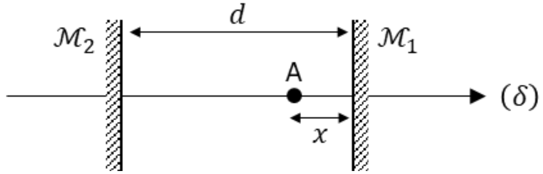
Exercice n°3 - Rotation d'un miroir ★☆☆

Soit un rayon lumineux arrive sur un miroir plan à incidence normale.

Quel est l'angle de déviation lorsque le miroir tourne d'un angle α ?

Exercice n°4 - Association de deux miroirs ★★⯪

Deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont parallèles et distants de d.



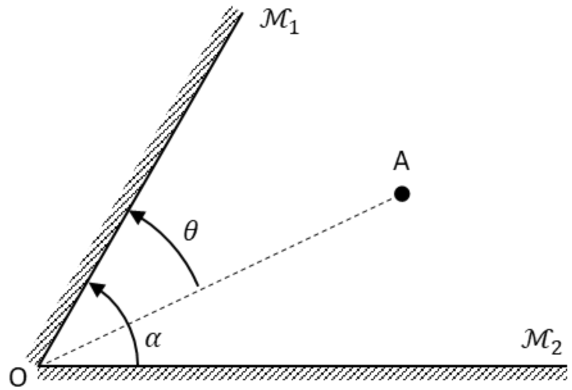
Un objet ponctuel A situé entre les miroirs à la distance x de $\mathcal{M}_1$ donne par réflexions successives sur les miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ une série d'images sur l'axe (δ). On note :

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\mathcal{M}_1} \mathrm{A}_1 \xrightarrow{\mathcal{M}_2} \mathrm{A}_2 \xrightarrow{\mathcal{M}_1} \mathrm{A}_3 \xrightarrow{\mathcal{M}_2} \mathrm{A}_4 \quad \text{etc.}$$

1) Déterminer, en fonction de x et d, les distances $\overline{\mathrm{AA}_1}$, $\overline{\mathrm{AA}_2}$, $\overline{\mathrm{AA}_3}$ et $\overline{\mathrm{AA}_4}$.

2) En déduire la distance $\overline{\mathrm{AA}_n}$ suivant que n est pair ou impair. Quel est le nombre d'images observées ?

Les miroirs forment maintenant un angle α.



Un objet ponctuel A situé entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ est repéré par l'angle orienté $\theta = (\widehat{\mathrm{OA}, \mathcal{M}_1})$. On repère les images A_n comme précédemment.

3) Déterminer les positions angulaires $\varphi_\mathrm{n} = (\widehat{\mathrm{OA}, \mathrm{OA}_\mathrm{n}})$ des images A_n, pour n pair et n impair.

4) Quel est le nombre d'images distinctes observées si $\alpha = \pi/p$, avec p un entier ?

Exercice n°5 - Questions diverses sur les lentilles ★★☆

Toutes les questions sont indépendantes.

1) On souhaite obtenir, grâce à une lentille mince convergente de focale $f' = 30\ cm$, une image réelle $\mathrm{A'B'}$ quatre fois plus grande que AB. Déterminer la distance $\overline{\mathrm{OA}}$.

2) Une lentille mince convergente de focale $f' = 30\ cm$ donne d'un objet réel AB une image réelle A'B' tel que $\overline{\mathrm{AB}} = -\overline{\mathrm{A'B'}}$. Déterminer la distance $\overline{\mathrm{AA'}}$.

3) Proposer une méthode pour obtenir une image réelle droite (ie. non renversée) d'un objet réel à l'aide de lentilles minces convergentes.

4) Démontrer les relations du grandissement.

5) Démontrer la relation de conjugaison avec origine au centre optique.

Exercice n°6 - Système afocale ★★☆

Un système afocal est un système où les points focaux sont à l'infini. Ainsi, par définition, l'image de $\mathrm{A}(-\infty)$ sur l'axe optique se trouve en $\mathrm{A'}(+\infty)$ sur l'axe optique.

1) Construire un système afocal à l'aide de deux lentilles minces convergentes.

2) Construire un système afocal à l'aide d'une lentille mince convergente et d'une divergente.

Un faisceau lumineux parallèle de diamètre $d = 2\ mm$ est issu d'une source laser. On désire multiplier ce diamètre par 10 à l'aide du système de la question 1.

3) On donne $f_2' = 50\ \mathrm{mm}$. Déterminer la distance focale f_1' de la première lentille, ainsi que le distance $\overline{O_1O_2}$ séparant les deux lentilles.

Exercice n°7 - Photocopieur (ancien modèle) ★★☆

On considère un photocopieur capable, grâce à un système optique que l'on va décrire dans cet exercice, de reproduire un document A4 soit en format A3 (chaque côté est agrandi d'un facteur $\sqrt{2}$, donc la surface double), soit en format A5 (chaque côté est divisé d'un facteur $\sqrt{2}$, donc la surface est réduite de moitié). Le système optique forme une image réelle du document sur un écran E.

Le système possède 2 lentilles : $\mathcal{L}_1$ de distance focale f_1', et $\mathcal{L}_2$ de distance focale $f_2' = -6{,}5\ \mathrm{cm}$. Le document à photocopier se trouve à $42\ \mathrm{cm}$ de E et à $20\ \mathrm{cm}$ de O_1. L'écran se trouve à $20\ \mathrm{cm}$ de O_2.

Appelons A l'objet à photocopier. On note A_1 l'image de A à travers $\mathcal{L}_1$, et $\mathrm{A'}$ l'image de A_1 à travers $\mathcal{L}_2$, se trouvant sur l'écran E.

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \mathrm{A}_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \mathrm{A'}$$

1) Faire un schéma du dispositif faisant apparaitre les distances connues.

2) Déterminer l'expression de $\overline{\mathrm{O_2A_1}}$ en fonction des données connues du problème. Faire l'application numérique.

3) Déterminer l'expression de f_1' en fonction des données connues du problème. Faire l'application numérique.

4) Montrer que le grandissement du photocopieur, c'est-à-dire à travers $\{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\}$, est égal produit des grandissements de chaque lentille. En déduire la valeur du grandissement du photocopieur. Quel format obtient-on en sorti ?

La lentille $\mathcal{L}_1$ est en réalité un doublet de deux lentilles minces accolées : $\mathcal{L}_1 = \{\mathcal{L}_{2'} + \mathcal{L}_3\}$, où $\mathcal{L}_{2'}$ est identique à $\mathcal{L}_2$. On translate la lentille $\mathcal{L}_3$ pour l'accoler à $\mathcal{L}_2$. Les positions de A et de E restent inchangées.

5) En utilisant le principe de retour inverse de la lumière, déterminer sans calcul la valeur du grandissement du photocopieur. Quel format obtient-on en sorti ?

Exercice n°8 - Lois de Descartes appliquées aux lentilles minces ★★★

On se propose dans ce problème de démontrer la formule reliant la distance focale image f' d'une lentille à ses caractéristiques physiques :

$$f' = \frac{1}{n-1}\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

où n représente l'indice de réfraction du verre utilisé pour réaliser la lentille et R_1 et R_2 , les rayons de courbure de ses deux faces.

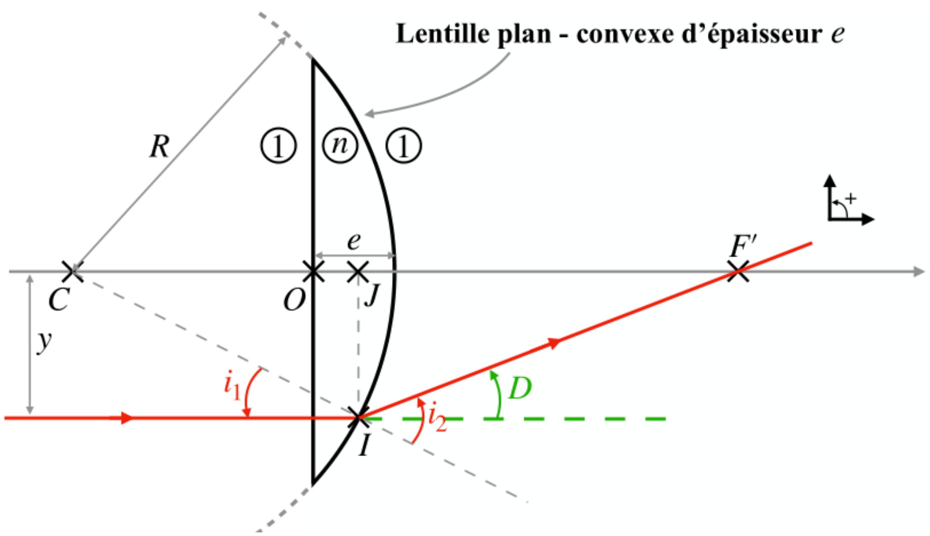
Le problème se compose de deux parties relativement indépendantes :

- dans un premier temps, on cherche à étudier une lentille plan-convexe à l'aide des lois de l'optique géométrique ;
- on généralisera ensuite le résultat obtenu aux lentilles biconvexes en accolant deux lentilles plan-convexe.

Étude d'une lentille plan-convexe

Dans tout l'exercice, **les angles sont orientés** (positivement dans le sens trigonométrique).

On étudie une lentille plan-convexe dont la face de gauche est plane et la face de droite est délimitée par un cercle de centre C et de rayon R. L'épaisseur de la lentille au niveau de l'axe optique Δ est notée e. On considère alors un rayon lumineux arrivant parallèle à l'axe optique en incidence normale (l'écart à l'axe, compté positivement, est noté y) sur la face de gauche.



Ce rayon est ensuite réfracté vers l'axe optique, qu'il intersecte au point F', le foyer image de la lentille. L'ensemble est représenté sur le schéma ci-dessus. On considérera, dans cette partie uniquement, que la lentille est réalisée dans un verre d'indice $n = 1{,}5$.

1) Exprimer l'angle i_1 en fonction de y et R.

2) Au-delà de quelle valeur de l'angle i_1, notée $i_{1,lim}$, peut-on observer le phénomène de réflexion totale en I ? Donner ensuite l'expression de y_{lim} correspondant.

On considère alors que $y < y_{lim}$ dans toute la suite de l'exercice.

3) Quelle est l'expression de l'angle i_2 en fonction de n, y et R ?

4) Exprimer ensuite l'angle de déviation D en fonction de i_2 et i_1

5) Déterminer la distance $\overline{JF'}$ en fonction de y, n et R.

6) Montrer finalement que la distance $f' = \overline{OF'}$ s'exprime selon l'expression :

$$f' = e + \mathrm{R}\left[\cos\left(\arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right) - 1 + \frac{\frac{y}{R}}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{ny}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right)}\right]$$

On observe que la position du foyer image F' dépend de y. La lentille n'est donc pas rigoureusement stigmatique. On introduit le ratio k défini par :

$$k = \frac{e}{R}$$

On cherche alors à déterminer une condition sur k permettant d'obtenir un stigmatisme approché. Dans toute cette partie, on supposera que $R = 1\ \mathrm{m}$.

7) Exprimer f'_0, la limite de f' lorsque $y \to 0$. On rappelle que pour $x \ll 1$ rad, on peut effectuer les approximations suivantes :

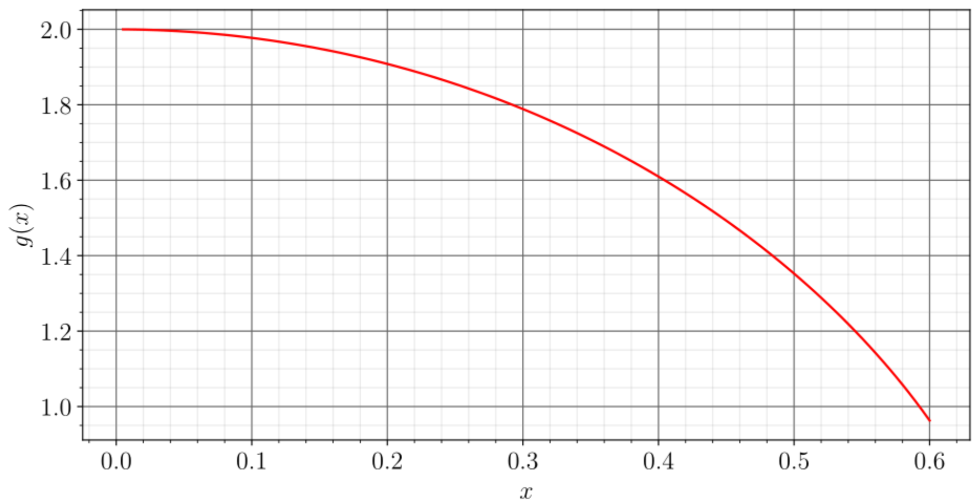
$$\tan(x) \simeq x \qquad \arcsin(x) \simeq x \qquad \cos(x) \simeq 1$$

8) On s'intéresse à présent au rayon le plus éloigné de l'axe optique et passant par l'extrémité basse de la lentille et on note y_{max} la distance à l'axe correspondante. Déterminer l'expression de y_{max} en fonction de R et k.

On introduit la fonction g_n définie sur $\left[0\,;\frac{1}{n}\right[$ et telle que :

$$g_n(x) = \left(\cos(\arcsin(x)) - 1 + \frac{x}{\tan(\arcsin(nx) - \arcsin(x))}\right)$$

et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



9) On note f'_{max} la distance focale image obtenue pour le rayon précédent (à la distance y_{max} de l'axe optique). Exprimer alors f'_0 et f'_{max} en fonction de R, k, n et la fonction $g(n)$. Compléter le tableau ci-dessous en vous aidant éventuellement du graphique précédent.

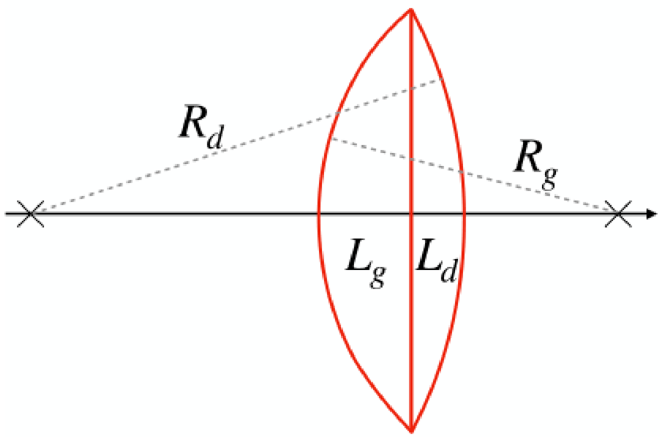
k	$1/10$	$1/50$	$1/150$
f'_0			
y_{max}/R			
f'_{max}			

10) On considère que le système optique est stigmatique de manière approchée lorsque l'écart relatif entre les distances focales images est inférieur à 5 % étant donné le capteur choisi. Cette condition est-elle remplie pour une lentille plan-convexe de rayon $R = 1$ m et d'épaisseur $e_1 = 10$ cm ? Et pour une épaisseur $e_1 =$ 0,6 cm ?

Étude d'une lentille biconvexe

Dans la partie précédente, on a démontré qu'une lentille plan-convexe suffisamment mince ($e \ll R$) présente un stigmatisme approché. Dans ces conditions, on retiendra la formule suivante pour la distance focale image d'une lentille plan-convexe.

$$f'_{plan-convexe} = \frac{R}{n-1}$$



On suppose de plus que cette formule est valable pour une lentille convexe-plan (lentille précédente retournée).

On considère à présent une lentille biconvexe, constituée de deux lentilles minces plan-convexe accolées, et de rayons respectifs R_g (lentille de gauche L_g) et R_d (lentille de droite L_d) comme représentée sur le schéma de droite.

11) Rappeler la relation de conjugaison de Descartes pour une lentille mince de centre O et de distance focale f' dans les conditions de Gauss.

12) Démontrer le théorème des vergences, qui stipule que deux lentilles minces accolées (de même centre optique) de vergence V_1 et V_2 et équivalent à une lentille unique de vergence $\boxed{V = V_1 + V_2}$.

13) Appliquer le théorème des vergences à la lentille biconvexe, et montrer que sa distance focale vaut :

$$f' = \frac{1}{n-1}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

Exercice n°9 - Objectif achromatique ★★★

La vergence V d'une lentille mince est donnée par la relation algébrique suivante :

$$V = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

où n est l'indice de réfraction du verre constituant la lentille et R_1 et R_2 les rayons de courbure algébriques respectivement des faces avant et arrière de la lentille.

L'indice n varie avec la longueur d'onde dans le vide λ suivant la loi empirique de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

A et B étant deux constantes positives.

Pour un verre de type Crown, $A = 1{,}515$ et $B = 3500\ nm^2$.

On note n_F, n_D et n_C sont les indices du verre pour les radiations F (bleu : $\lambda_F =$ 486,0 nm), D (jaune : $\lambda_D =$ 589,0 nm) et C (rouge : $\lambda_C =$ 656,0 nm).

Distances focales

On considère une lentille mince $\mathcal{L}$, en verre crown, biconvexe avec les rayons de courbure algébriques R_1 et R_2 tels que $R_1 = +90\ cm$ et $R_2 = -150\ cm$. On note

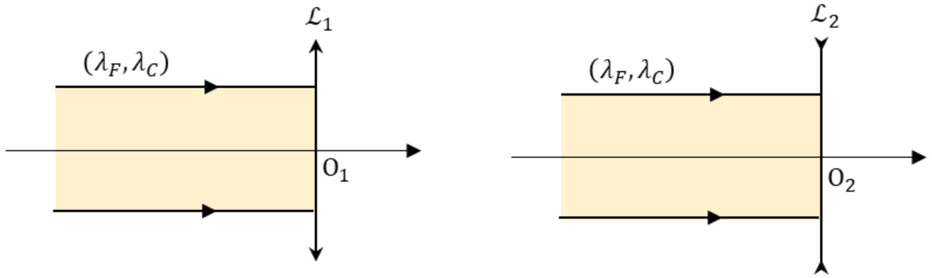
f'_F, f'_D et f'_C les distances focales images et F'_F, F'_D et F'_C les foyers images de la lentille pour les radiations F, D et C respectivement.

1) Calculer les indices n_F, n_D et n_C avec 3 chiffres significatifs.

2) Déterminer la distance focale moyenne f'_D de $\mathcal{L}$, avec 3 chiffres significatifs.

Aberration chromatique

Deux lentilles minces en verre Crown $\mathcal{L}_1$ convergente et $\mathcal{L}_2$ divergente (voir ci-dessous) sont éclairées, parallèlement à l'axe optique, par un faisceau de lumière blanche.



3) Indiquer pour chacune de ces deux lentilles la position relative des foyers F'_F et F'_C sur l'axe optique

4) Reproduire les figures précédentes et tracer le cheminement des rayons lumineux bleu et rouge de longueur d'onde respectives λ_F et λ_C émergeant des lentilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$.

L'aberration chromatique longitudinale d'une lentille est définie par la distance algébrique $A_L = \overline{F'_F F'_C}$ qui sépare les foyers bleu F'_F et rouge F'_C.

5) On supposera que : $f'_F f'_C \simeq (f'_D)^2$. Pour la lentille convergente $\mathcal{L}_1$, montrer que :

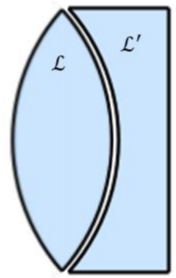
$$A_L = \frac{f'_D}{\nu} \qquad avec : \qquad \nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

6) Calculer numériquement A_L.

Doublet achromatique

On réalise un objectif mince, en accolant la lentille $\mathcal{L}$ précédente en verre Crown, avec une lentille $\mathcal{L}'$ plan-concave en verre de type Flint, de sorte que les faces en contact aient le même rayon de courbure R_2 (voir schéma ci-contre).

L'objectif de cette partie est de déterminer les indices de Cauchy A' et B' du verre Flint, qui annule l'aberration chromatique longitudinale.



7) Exprimer les vergences V et V' respectivement des lentilles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ en fonction des constantes A, B, A' et B', des rayons R_1 et R_2, et de λ. En déduire la vergence $V_{tot} = V + V'$ des deux lentilles accolées.

8) Déterminer l'expression de $\frac{dV_{tot}}{d\lambda}$. Que doit valoir cette expression pour supprimer l'aberration chromatique ? En déduire une relation entre B, B' , R_1 et R_2 puis exprimer la vergence V_{tot} en fonction de A, A', R_1 et R_2.

9) Calculer les constantes A' et B' pour une vergence V_{tot} de l'objectif égale à 0,5 δ, avec respectivement 4 et 2 chiffres significatifs.

Éléments de réponse

❶ Oui. ❷ L/2, quel que soit la distance. ❸ $\pi - 2\alpha$. ❹ 1) $\overline{AA_1} = 2x$, $\overline{AA_2} = -2d$, $\overline{AA_3} = 2d + 2x$ et $\overline{AA_4} = -4d$. 2) $\overline{AA_n} = -nd$ si n est pair et $\overline{AA_n} = (n-1)d + 2x$ si n est impair. 3) $\varphi_n = -n\alpha$ si n est pair et $\varphi_n = (n-1)\alpha + 2\theta$ si n est impair. 4) $2p$ images. ❺ 1) $\overline{\mathrm{OA}} = -38$ cm. 2) $\overline{\mathrm{AA'}} = 4f'$. 3) Deux lentilles convergentes. ❻ 3) $f'_1 = 5$ mm et $\overline{\mathrm{O_1O_2}} = 55$ mm. ❼ 2) $\overline{\mathrm{O_2A_1}} = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{O_2A'}}} - \frac{1}{f'_2}\right)^{-1} = 4{,}91$ cm. 3) $f'_1 = 5{,}13$ cm. 4) $\gamma = -\sqrt{2}$. ❽ 1) $i_1 = \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)$. 2) $y_{lim} = R\sin(i_{1,lim}) = \frac{R}{n}$. 3) $i_2 = \arcsin\left(\frac{ny}{R}\right)$. 4) $D = i_2 - i_1$. 5) $\overline{JF'} = \frac{\mathrm{y}}{\tan(i_2 - i_1)} = \frac{\mathrm{y}}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{ny}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right)}$. 6) $f' = \overline{OF'} = \overline{OC} + \overline{CJ} + \overline{JF'}$. 7) $f'_0 = e + \frac{R}{n-1}$. 8) $y_{max} = kR\sqrt{\frac{2}{k} - 1}$. 9) $f'_0 = R\left(k + \frac{1}{n-1}\right)$ et $f'_{max} = R\left[k + g\left(k\sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right)\right]$. ❾ 1) $n_F = 1{,}530$, $n_D = 1{,}525$ et $n_C = 1{,}523$. 2) $f'_D = \frac{1}{V_D} = \left[(n_D - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right]^{-1} = 107\ cm$. 3) $|f'_F| < |f'_C|$. 6) $A_L = \frac{f'_D}{\nu} = 13{,}6\ cm$. 7) $V = \left(A + \frac{B}{\lambda^2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ et $V' = \left(A' + \frac{B'}{\lambda^2} - 1\right)\frac{1}{R_2}$. 8) $\frac{dV_{tot}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{B}{R_1} + \frac{B' - B}{R_2} = 0$. 9) $A' = R_2\left(V - \frac{A-1}{R_1}\right) + A = 1{,}623$ et $B' = B\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) = 5{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{nm}^2$.