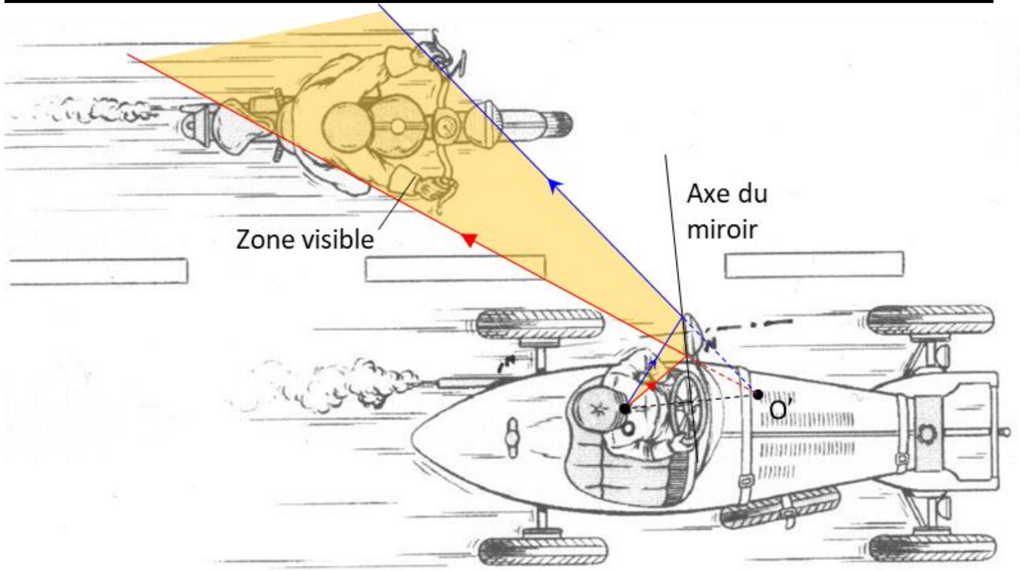
Optique géométrique | Chapitre 2 | TD (O2)

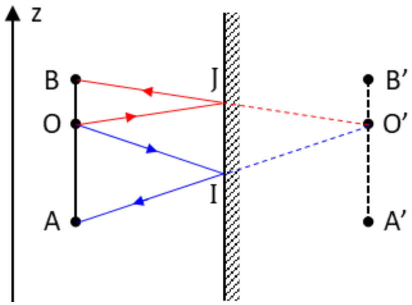
Exercice n°1 - Angle mort ★☆☆



Oui, le motard est visible dans le rétroviseur. En revanche, s'il avance légèrement, il passera dans l'angle mort.

Exercice n°2 - Taille du miroir ★★☆

On note O la position des yeux de l'homme.



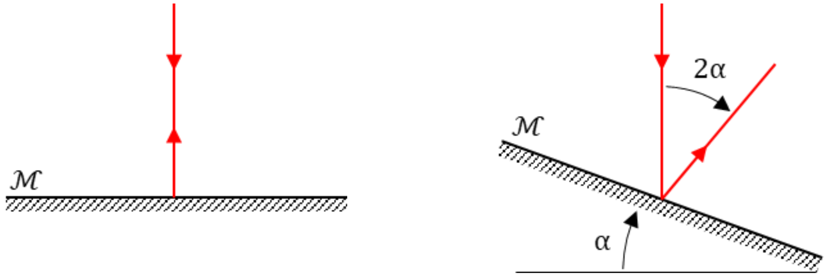
Pour se voir en entier, le miroir doit mesurer au minimum :

$$\mathrm{d_{min}} = \mathrm{z_J} - \mathrm{z_I} = \frac{\mathrm{z_B} - \mathrm{z_O}}{2} - \frac{\mathrm{z_O} - \mathrm{z_A}}{2} = \frac{\mathrm{L}}{2}$$

Cela correspond à la moitié de la taille de l'homme. Cette longueur ne dépend pas de la distance au mur.

Exercice n°3 - Rotation d'un miroir ★☆☆

Le rayon réfléchi est dévié d'un angle $\pi - 2\alpha$.



Exercice n°4 - Association de deux miroirs ★★★

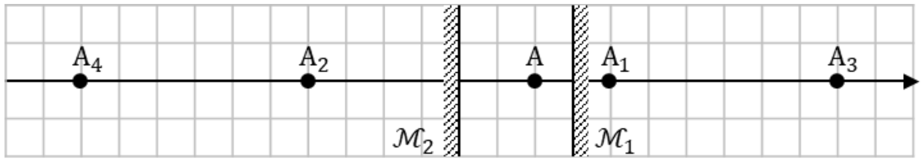
1) On utilise le fait que le point image est le symétrique du point objet par rapport au miroir. Ainsi, la distance objet/ image est le double de la distance objet/miroir. Attention, les distances sont algébriques.

$$\overline{AA_1} = \boxed{2x}$$

$$\overline{AA_2} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} = \underbrace{\overline{AA_1}}_{2x} + 2\ \underbrace{\overline{A_1\mathcal{M}_2}}_{-(d+x)} = \boxed{-2d}$$

$$\overline{AA_3} = \overline{AA_2} + \overline{A_2A_3} = \underbrace{\overline{AA_2}}_{-2d} + 2\ \underbrace{\overline{A_2\mathcal{M}_1}}_{2d+x} = \boxed{2d + 2x}$$

$$\overline{AA_4} = \overline{AA_3} + \overline{A_3A_4} = \underbrace{\overline{AA_3}}_{2d+2x} + 2\ \underbrace{\overline{A_3\mathcal{M}_2}}_{-(3d+x)} = \boxed{-4d}$$



2) On en déduit :

$\boxed{\overline{AA_n} = -nd}$ si n est pair

$\boxed{\overline{AA_n} = (n-1)d + 2x}$ si n est impair

On observe donc une infinité d'images.

3) L'ensemble des images se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon OA.

Ainsi (on remarquera la ressemblance avec le cas précédent) :

$$\varphi_1 = (\widehat{OA, OA_1}) = 2\,\underbrace{(\widehat{OA, \mathcal{M}_1})}_{\theta} = \boxed{2\theta}$$

$$\varphi_2 = (\widehat{OA, OA_2}) = (\widehat{OA, OA_1}) + (\widehat{OA_1, OA_2}) = \underbrace{(\widehat{OA, OA_1})}_{2\theta} + 2\,\underbrace{(\widehat{OA_1, \mathcal{M}_2})}_{-(\theta+\alpha)} = \boxed{-2\alpha}$$

$$\varphi_3 = (\widehat{OA, OA_3}) = (\widehat{OA, OA_2}) + (\widehat{OA_2, OA_3}) = \underbrace{(\widehat{OA, OA_2})}_{-2\alpha} + 2\,\underbrace{(\widehat{OA_2, \mathcal{M}_1})}_{\theta+2\alpha} = \boxed{2\alpha + 2\theta}$$

$$\varphi_4 = (\widehat{OA, OA_4}) = (\widehat{OA, OA_3}) + (\widehat{OA_3, OA_4}) = \underbrace{(\widehat{OA, OA_3})}_{2\alpha+2\theta} + 2\,\underbrace{(\widehat{OA_3, \mathcal{M}_2})}_{-(\theta+3\alpha)} = \boxed{-4\alpha}$$

On en déduit finalement,

$\boxed{\varphi_n = -n\alpha}$ si n est pair

$\boxed{\varphi_n = (n-1)\alpha + 2\theta}$ si n est impair

4) Si $\alpha = \pi/p$, alors :

$$\varphi_n = -\frac{n}{p}\pi \quad \text{et} \quad \varphi_{2p+n} = -\frac{2p+n}{p}\pi = \varphi_n - 2\pi$$

On en déduit que l'image n°2p est superposée à l'image n°0 (c'est-à-dire l'objet). Il y a donc $\boxed{2p}$ images uniquement.

Cela se confirme avec les cas où $p = 1$ (cas du miroir plan) et $p = 2$ (cas du miroir en angle droit).

Exercice n°5 - Questions diverses sur les lentilles ★☆☆

1) On a :

$$\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FO} + \overline{OA}} = -4 \quad \Rightarrow \quad \overline{OA} = \frac{\overline{FO}}{\gamma} - \overline{FO} = \frac{30}{-4} - 30 = \boxed{-38\text{ cm}}$$

Il faut placer l'objet 38 cm devant de centre optique de la lentille.

<u>Remarque</u> : attention, pour une lentille mince convergente donnant une image réelle d'un objet réel, le grandissement est négatif !

2) On a :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -1 = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

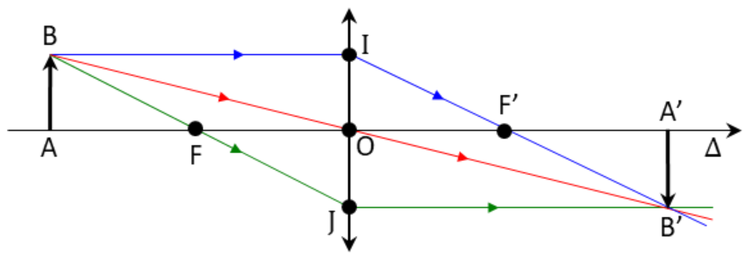
Ainsi,

$$\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{FF'} + \overline{F'A'} = \underbrace{\overline{FO}}_{f'} + \underbrace{\overline{FF'}}_{2f'} + \underbrace{\overline{OF'}}_{f'} = \boxed{4f'}$$

3) On peut utiliser une première lentille mince convergentes $\mathcal{L}_1$ afin de former une image (intermédiaire) réelle inversée A_1B_1, puis une deuxième lentille mince convergentes afin de former une image réelle droite A_2B_2.

$$AB \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} A_1B_1 \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} A_2B_2$$

4) Notations :



On applique le théorème de Thalès dans les triangles semblables OAB et OA'B' (en faisant attention aux conventions de signe !) :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \boxed{\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}$$

On applique le théorème de Thalès dans les triangles semblables FAB et FOJ :

$$\left(\frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right) = \boxed{\frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}}$$

On applique le théorème de Thalès dans les triangles semblables OIF' et F'A'B' :

$$\left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right) = \boxed{\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}}$$

5) On utilise les formules du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 1 - \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OF'} + \overline{F'A'}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OF'}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$$

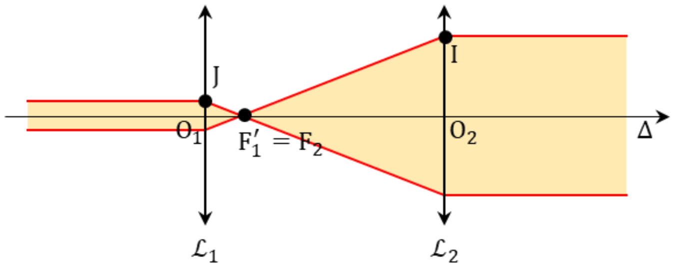
Exercice n°6 - Système afocale ★★☆

1) Par définition d'un système afocal :

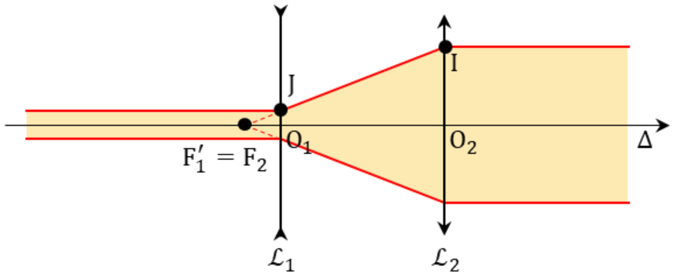
$$A(-\infty) \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} F'_1 = F_2 \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} A'(+\infty)$$

Le foyer image de la première lentille doit être confondu avec le foyer objet de la deuxième.

Schéma avec deux lentilles convergentes :



2) Schéma avec deux lentilles convergentes :



3) On appelle d le diamètre initial du faisceau et D le diamètre final. On applique le théorème de Thalès dans les triangles F_2IO_2 et F_2O_1J :

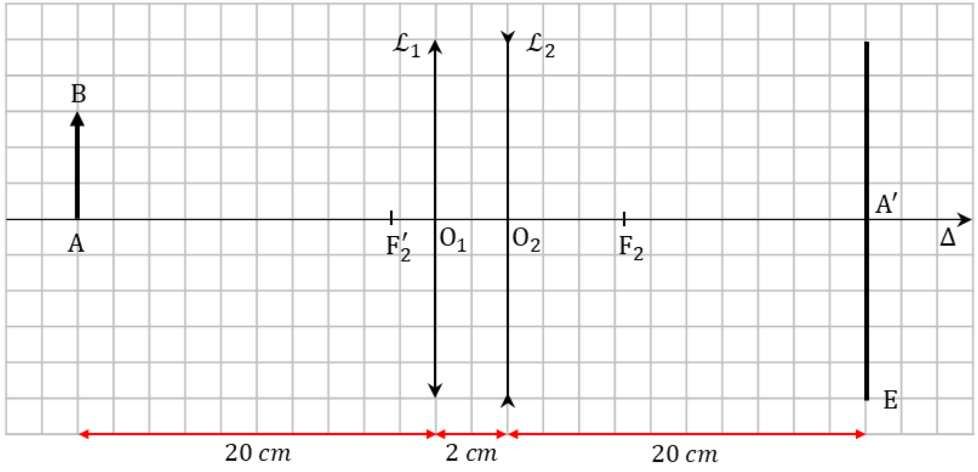
$$\frac{-\overline{F'_1O_1}}{\overline{F_2O_2}} = \frac{\overline{O_1J}}{\overline{O_2I}} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'_1}{f'_2} = \frac{d/2}{D/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'_1 = f'_2\frac{d}{D} = 5\text{ mm}}$$

Les deux lentilles sont séparées d'une distance :

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} = f'_1 + f'_2 = \boxed{55\text{ mm}}$$

Exercice n°7 - Photocopieur (ancien modèle) ★★☆

1) 1 carreau = 2 cm



2) On a :

$$A \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} A_1 \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} A'$$

On applique la relation de conjugaison entre A_1 et A'.

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_2A_1} = \left(\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{f'_2}\right)^{-1} = 4{,}91\text{ cm}}$$

3) On applique la relation de conjugaison entre A et A_1.

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'_1 = \left(\frac{1}{\overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}}\right)^{-1} = 5{,}13\text{ cm}}$$

4) On a :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \cdot \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = -1{,}41 \simeq \boxed{-\sqrt{2}}$$

On obtient en sorti un format A3.

5) Après translation de $\mathcal{L}_3$ vers $\mathcal{L}_2$, on remarque que la situation est identique au schéma de la question 1, avec $\mathrm{A'B'}$ l'objet et AB l'image. Ainsi, $\mathrm{A'B'}$ est $\sqrt{2}$ fois plus petit que AB.

D'après le principe de retour inverse de la lumière, si AB est l'objet, alors $\mathrm{A'B'}$ est l'image, de taille $\sqrt{2}$ fois plus petite. C'est donc un format A5.

Exercice n°8 - Lois de Descartes appliquées aux lentilles minces ★★★

1) On se place dans le triangle CIJ rectangle en J et on obtient à l'aide d'angles alternes-internes :

$$\sin(i_1) = \frac{y}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1 = \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)}$$

2) On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsque l'on passe d'un milieu donné vers un milieu moins réfringent, ce qui est bien le cas ici. L'angle limite est donné par la formule :

$$i_{1,lim} = \arcsin\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{lim} = R\sin(i_{1,lim}) = \frac{R}{n}}$$

3) Loi de Snell-Descartes de la réfraction :

$$\sin(i_2) = n\sin(i_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{ny}{R}\right)}$$

4) On a :

$$\boxed{D = i_2 - i_1}$$

5) Dans le triangle JIF', l'angle en F' vaut D :

$$\tan(D) = \frac{JI}{JF'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{JF'} = \frac{y}{\tan(i_2 - i_1)} = \frac{y}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{ny}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right)}}$$

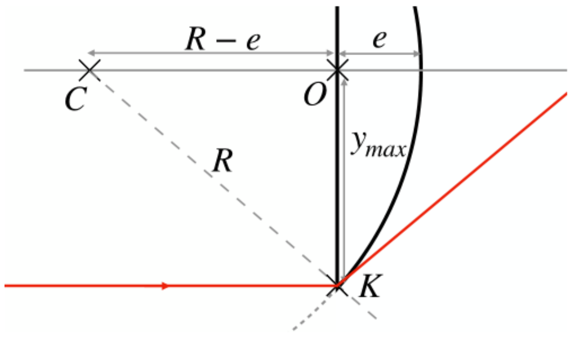
6) Finalement,

$$\begin{aligned} f' = \overline{OF'} &= \overline{OC} + \overline{CJ} + \overline{JF'} \\ &= (e - R) + R\cos(i_1) + \overline{JF'} \\ &= e + \mathrm{R}\left[\cos\left(\arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right) - 1 + \frac{\frac{y}{R}}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{ny}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right)}\right] \end{aligned}$$

7) On en déduit que :

$$f_0' = e + \lim_{y \to 0}\left(\frac{\frac{y}{R}}{\frac{ny}{R} - \frac{y}{R}}\right) = \boxed{e + \frac{R}{n-1}}$$

8) On réalise le schéma suivant :



Puis on applique le théorème de Pythagore dans le triangle KCO :

$$R^2 = (R-e)^2 + y_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad y_{max} = \sqrt{R^2 - (R-e)^2} = \sqrt{2Re - e^2}$$
$$= \sqrt{2kR^2 - k^2R^2} = \boxed{kR\sqrt{\frac{2}{k} - 1}}$$

9) On a :

$$\boxed{f_0' = e + \frac{R}{n-1} = R\left(k + \frac{1}{n-1}\right)}$$

De plus,

$$f'_{max} = e + \mathrm{R}\cdot g\left(\frac{y_{max}}{R}\right) = R\left[k + g\left(\frac{y_{max}}{R}\right)\right] = \boxed{R\left[k + g\left(k\sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right)\right]}$$

On en déduit :

k	$1/10$	$1/50$	$1/150$
f'_0	2,1 m	2,02 m	2,007 m
y_{max}/R	0,44	0,20	0,12
f'_{max}	1,6 m	1,92 m	1,98 m

10) La première épaisseur correspond à $k = 1/10$. L'écart relatif de la distance focale image vaut :

$$\frac{2{,}1 - 1{,}6}{1{,}6} = 30\ \%$$

La condition associée au stigmatisme approchée n'est pas remplie pour cette lentille

La deuxième épaisseur correspond à $k = 1/150$. L'écart relatif de la distance focale image vaut :

$$\frac{2{,}007 - 1{,}98}{1{,}98} = 1{,}4\ \%$$

Cette fois ci, la condition est remplie.

11) Relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

12) On considère la transformation suivante :

$$A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2$$

Alors, la relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

En sommant les deux :

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{f'_{eq}}$$

On retrouve une relation de conjugaison analogue, pour la transformation : $A \xrightarrow{\mathcal{L}_{eq}} A_2$, où $\mathcal{L}_{eq}$ est une lentille de distance focale :

$$\boxed{\frac{1}{f'_{eq}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}}$$

13) Le théorème des vergences donne :

$$f' = \left(\frac{1}{f'_{gauche}} + \frac{1}{f'_{droite}}\right)^{-1} = \left(\frac{n-1}{R_g} + \frac{n-1}{R_d}\right)^{-1} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_d}\right)^{-1}$$
$$= \boxed{\frac{1}{n-1}\frac{R_d R_g}{R_d + R_g}}$$

Exercice n°9 - Objectif achromatique ★★★

1) On trouve :

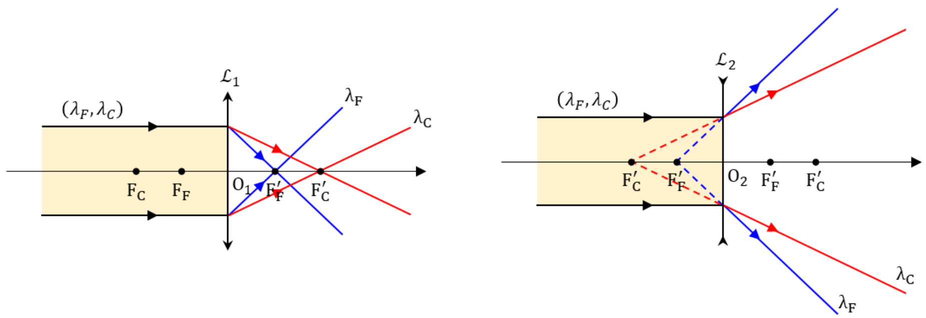
$$\boxed{n_F = 1{,}530 \qquad n_D = 1{,}525 \qquad n_C = 1{,}523}$$

2) Par définition :

$$\boxed{f'_D = \frac{1}{V_D} = \left[(n_D - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right]^{-1} = 107\ cm}$$

3) Puisque $n_F > n_C$, alors $|f'_F| < |f'_C|$.

4)



5) On a :

$$\begin{aligned} A_L = \overline{F'_F F'_C} &= \overline{F'_F O} + \overline{O F'_C} \\ &= f'_C - f'_F \\ &= \left(\frac{1}{n_C - 1} - \frac{1}{n_F - 1}\right)\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \\ &= \frac{n_F - n_C}{(n_F - 1)(n_C - 1)}\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \end{aligned}$$

On suppose de plus que $f'_F f'_C \simeq (f'_D)^2$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} f'_F f'_C &= \frac{1}{(n_C-1)(n_F-1)}\left(\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}\right)^2 \\ (f'_D)^2 &= \frac{1}{(n_D-1)^2}\left(\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}\right)^2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{(n_C-1)(n_F-1)} \simeq \frac{1}{(n_D-1)^2}$$

On a donc,

$$A_L = \frac{n_F-n_C}{(n_D-1)^2}\frac{R_2R_1}{R_2-R_1} = \frac{1}{\nu}\frac{1}{\mathrm{n_D}-1}\frac{R_2R_1}{R_2-R_1} = \boxed{\frac{f'_D}{\nu}}$$

6) On a :

$$\boxed{A_L = \frac{f'_D}{\nu} = 13{,}6\ cm}$$

7) Pour la première lentille, les rayons de courbure algébrique sont R_1 et R_2. Pour la deuxième lentille les rayons de courbure sont R_2 et $+\infty$ (un plan est un cercle de rayon infini). Les vergences s'écrivent donc :

$$\boxed{V = \left(A+\frac{B}{\lambda^2}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{V' = \left(A'+\frac{B'}{\lambda^2}-1\right)\frac{1}{R_2}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned} V_{tot} = V+V' &= \left(A+\frac{B}{\lambda^2}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\left(A'+\frac{B'}{\lambda^2}-1\right)\frac{1}{R_2} \\ &= \left(A+\frac{B}{\lambda^2}-1\right)\frac{1}{R_1}+\left(A'-A+\frac{B'-B}{\lambda^2}\right)\frac{1}{R_2} \end{aligned}}$$

8) On dérive cette expression.

$$\frac{dV_{tot}}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3R_1}-\frac{2(B'-B)}{\lambda^3R_2} = -\frac{2}{\lambda^3}\left(\frac{B}{R_1}+\frac{B'-B}{R_2}\right)$$

Pour supprimer les aberrations chromatiques, il faut que la vergence de la lentille ne dépende pas de la longueur d'onde. Il faut donc que :

$$\frac{dV_{tot}}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{B}{R_1}+\frac{B'-B}{R_2} = 0}$$

Ainsi, la vergence vaut :

$$\begin{aligned} V_{tot} &= \left(A+\frac{B}{\lambda^2}-1\right)\frac{1}{R_1}+\left(A'-A+\frac{B'-B}{\lambda^2}\right)\frac{1}{R_2} \\ &= \boxed{\frac{A-1}{R_1}+\frac{A'-A}{R_2}} \end{aligned}$$

9) Application numérique :

$$\boxed{A' = R_2\left(V-\frac{A-1}{R_1}\right)+A = 1{,}623}$$

$$\boxed{B' = B\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right) = 5{,}6\cdot 10^3\ \mathrm{nm}^2}$$