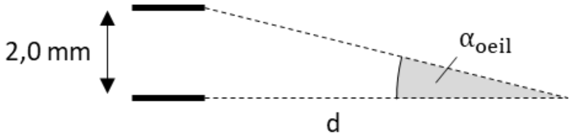
Optique géométrique | Chapitre 3 | Correction TD (O3)

Exercice n°1 - Pouvoir séparateur de l'œil ★☆☆

1) L'œil a un pouvoir séparateur de l'ordre de $\boxed{\alpha_{\text{œil}} \simeq 1' \simeq 3 \cdot 10^{-4}\ \text{rad}}$.

2) On cherche la distance d telle que les deux traits soient vus sous l'angle $\alpha_{\text{œil}}$.



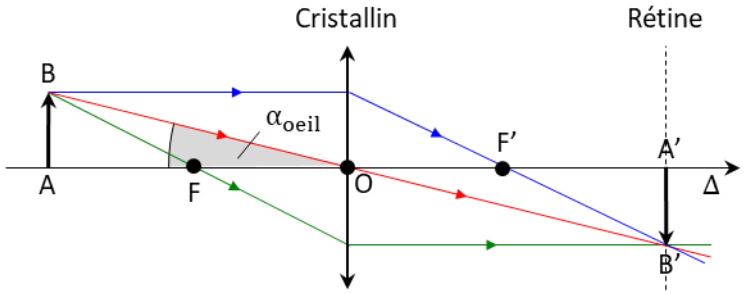
Ainsi, puisque $\alpha_{\text{œil}} \ll 1$ rad, on a :

$$\mathrm{d} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3}}{\tan(\alpha_{\text{œil}})} \simeq \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3}}{\alpha_{\text{œil}}} \simeq \boxed{7\ \mathrm{m}}$$

3) Il s'agit du même raisonnement. On appelle h la hauteur de la lettre. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{h} \simeq 250 \times \alpha_{\text{œil}} \simeq 75\ \mathrm{mm}}$$

4) Soit un objet AB situé à une distance OA de l'œil. A la limite de la résolution de l'œil, l'objet est vu sous un angle $\alpha_{\text{œil}}$.



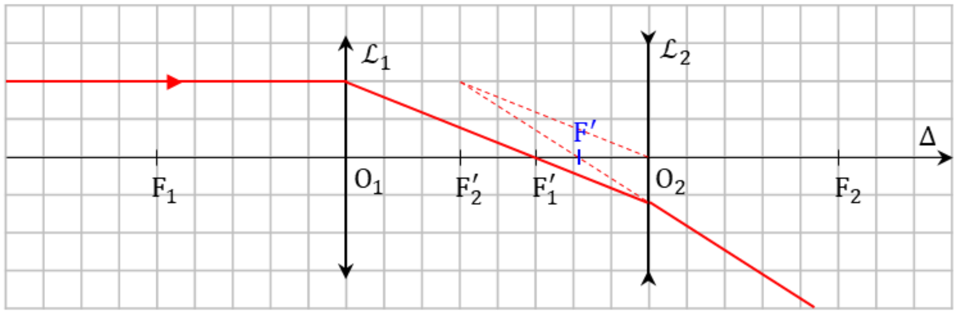
Cette limite de résolution correspond au cas où l'image est de l'ordre de la taille d'un récepteur (appelée $\mathrm{d_{recep}} = \mathrm{A'B'}$). En effet, dans le cas d'un objet plus petit la lumière incidente n'active qu'un seul récepteur et on ne distingue pas les points A et B. Ainsi :

$$\alpha_{\text{œil}} \simeq \tan(\alpha_{\text{œil}}) = \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{OA'}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d_{recep}} = \mathrm{OA'} \times \alpha_{\text{œil}} \simeq 7{,}5\ \mu\mathrm{m}}$$

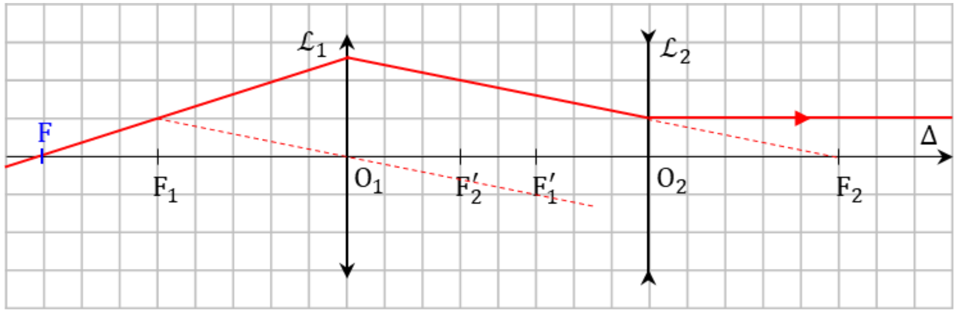
Exercice n°2 - Association de deux lentilles ★★☆

1) Par définition de F et F' :

$$-\infty \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} F_1' \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} F'$$



$$F \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} F_2 \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} +\infty$$



2) On utilise les relations de conjugaison sur les transformations :

$$F \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} F_2 \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} +\infty$$

On a :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f_1'}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e+a} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{\mathrm{a}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_1F} = -\frac{a(e+a)}{e} = -8{,}1\ \text{carreaux}}$$

On fait de même avec les transformations :

$$-\infty \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} F'_1 \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} F'$$

On a :

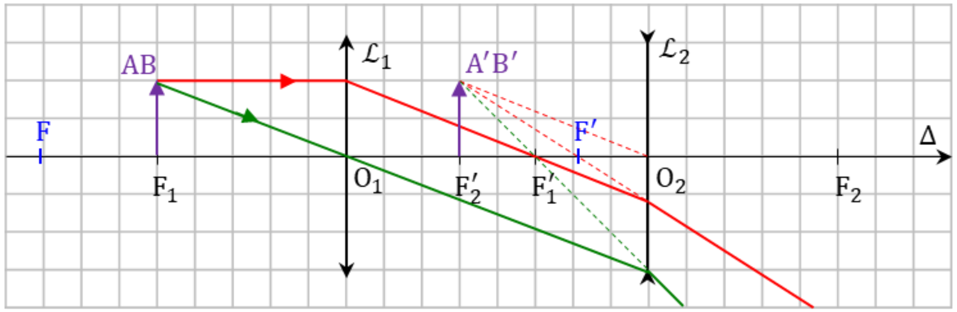
$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{-e+a} = \frac{1}{-a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_1F} = \frac{a(a-e)}{e} = -1{,}9 \text{ carreaux}}$$

3) On a :

$$F_1 \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} -\infty \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} F'_2$$



Grandissement :

$$\boxed{\gamma = 1}$$

Exercice n°3 - Lentilles de contact ★☆☆

1) Soit un objet AB et deux lentilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ de même centre optique O. On a :

$$\mathrm{AB} \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} \mathrm{A_1B_1} \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} \mathrm{A'B'} \quad \text{et} \quad \mathrm{AB} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \mathrm{A'B'}$$

Montrons que $V = 1/f'$, la vergence de la lentille $\mathcal{L}$ équivalente (si elle existe…), vaut $V_1 + V_2$. Pour cela, montrons que le formule de conjugaison de Descartes reste vérifiée avec $1/f' = 1/f'_1 + 1/f'_2$.

On a :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA_1}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA_1}}} = \frac{1}{f'_2}$$

En faisant la somme, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{f'}}$$

CQFD

2) On utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}}\right)^{-1}$$

Avec : $\overline{\mathrm{OA'}} = 15{,}0$ mm et -25 cm $> \overline{\mathrm{OA}} > -\infty$.

On trouve alors : $14{,}2$ mm $< f' < 15{,}0$ mm, ce qui correspond à une vergence :

$$\boxed{66{,}7\ \delta < V < 70{,}4\ \delta}$$

3) On cherche les valeurs que prend $\overline{\mathrm{OA}}$, avec $\overline{\mathrm{OA'}} = 15{,}2$ mm et avec $14{,}2$ mm $< f' < 15{,}0$ mm. On a :

$$\overline{\mathrm{OA}} = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{f'}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{-21{,}6 \text{ cm} > \overline{\mathrm{OA}} > -1{,}14 \text{ m}}$$

On a donc, pour cet œil myope : PP = 21,6 cm (plus proche qu'un œil emmétrope) et PR = 1,14 m (il n'est plus à l'infini).

4) Pour corriger le défaut, il faut ramener le PR à l'infini. Il faut donc que, au PR, le système { lentille + œil } ait une distance focale $f'_{\text{tot au PR}} = 15{,}2$ mm. Cela correspond à une vergence :

$$V_{\text{tot au PR}} = 65{,}8\ \delta = V_{\text{oeil au PR}} + V_{\text{lentille}} = 66{,}7 + V_{\text{lentille}}$$

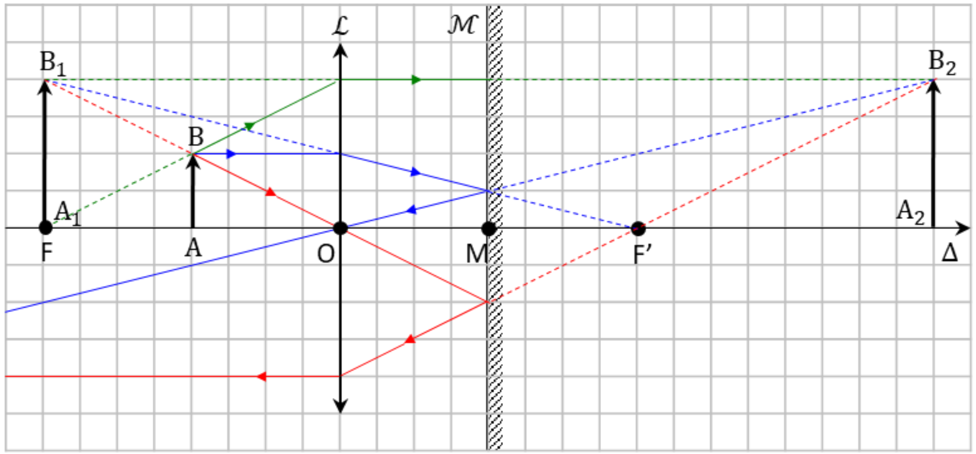
$$\Rightarrow \boxed{V_{\text{lentille}} = -0{,}9\ \delta}$$

Exercice n°4 - Lentille + Miroir ★☆☆

L'objet AB donne, à travers le système optique, les différentes images intermédiaires suivantes :

$$\mathrm{AB} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \mathrm{A_1B_1} \xrightarrow[\mathcal{M}]{} \mathrm{A_2B_2} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \mathrm{A'B'}$$

On représente les rayons sur le schéma ci-dessous (les rayons convergents vers A'B' ne sont pas représentés entièrement par soucis de place). D'après le graphique, l'image est réelle, renversée, et agrandie d'un facteur 2



Nous allons retrouver ces propriétés par le calcul.

On a :

$$\overline{\mathrm{OA}} = -\frac{f'}{2}$$

Ainsi $\left(\mathrm{AB} \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \mathrm{A_1B_1}\right)$:

$$\overline{\mathrm{OA_1}} = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} + \frac{1}{f'}\right)^{-1} = -f' \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \frac{\overline{\mathrm{OA_1}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = 2$$

De plus $\left(\mathrm{A_1B_1} \underset{\mathcal{M}}{\rightarrow} \mathrm{A_2B_2}\right)$:

$$\overline{\mathrm{OA_2}} = \overline{\mathrm{OM}} + \overline{\mathrm{MA_2}} = \frac{f'}{2} - \overline{\mathrm{MA_1}} = \frac{f'}{2} - \left(\overline{\mathrm{MO}} + \overline{\mathrm{OA_1}}\right) = \frac{f'}{2} - \left(-\frac{f'}{2} - f'\right) = 2f'$$

$$\gamma_2 = 1$$

Attention, à ce stade la lumière voyage de la droite vers la gauche, ce qui n'est pas la convention usuelle en optique. Pour utiliser les formules classiques, il faut au choix :

- inverser le signe des longueurs algébriques (exemple : $\overline{\mathrm{OA_2}} < 0$) ;
- inverser le rôle de F et F' (ainsi, $f' \rightarrow -f'$).

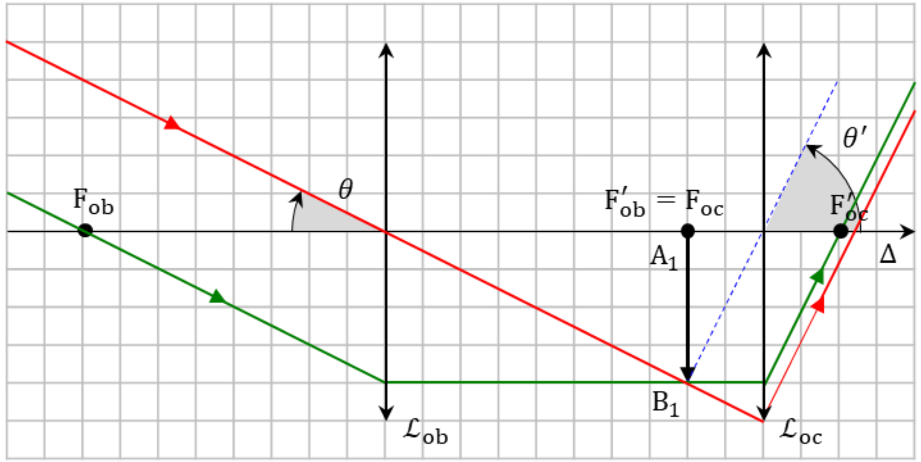
Nous allons utiliser cette dernière convention. On obtient finalement $\left(\mathrm{A_2B_2} \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \mathrm{A'B'}\right)$:

$$\overline{\mathrm{OA'}} = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{OA_2}}} + \frac{1}{-f'}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2f'} - \frac{1}{f'}\right)^{-1} = -2f' \quad \text{et} \quad \gamma' = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA_2}}} = -1$$

Finalement, on obtient une image réelle (car le sens de parcours de la lumière a été inversée), positionnée en $\boxed{\overline{\mathrm{OA'}} = -2f'}$ et de grandissement $\boxed{\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma' = -2}$.

Exercice n°5 - Lunette astronomique ★★☆

1)



L'image est à l'infini hors de l'axe optique. Elle est renversée (les rayons ont changé de sens), réelle et grossie ($\theta' > \theta$).

2)

(a) C'est un système afocal : elle renvoie à l'infini l'image d'un objet situé à l'infini.

(b) On a :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan(\theta')}{\tan(\theta)} = \frac{A_1B_1/f'_{oc}}{A_1B_1/f'_{ob}} = \boxed{\frac{f'_{ob}}{f'_{oc}} = 4}$$

3)

(a) Pour trouver le cercle oculaire, il suffit de trouver l'image des extrémités du diaphragme $\mathcal{D}_o$ (voir schéma ci-dessous).

(b) Transformation (avec C le centre du cercle oculaire) :

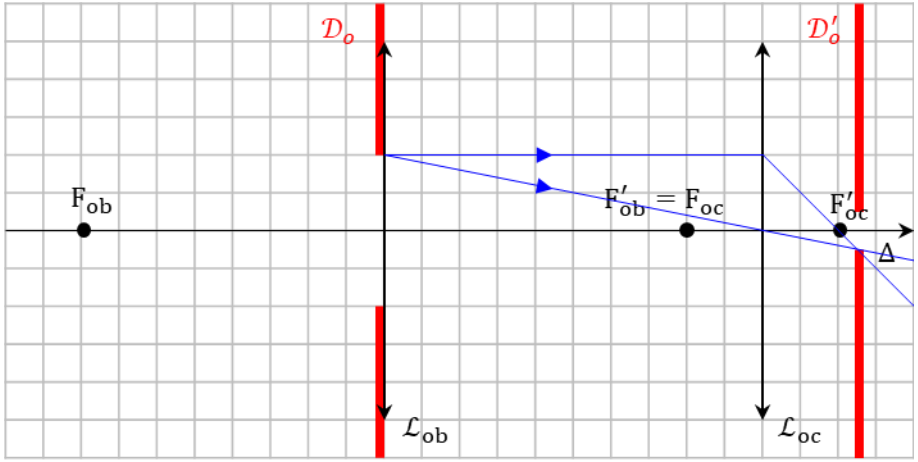
$$\mathrm{O_{ob}} \xrightarrow[\mathcal{L}_{oc}]{} C$$

Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{O_{oc}C}} - \frac{1}{\overline{O_{oc}O_{ob}}} = \frac{1}{f'_{oc}} \quad \Rightarrow \quad \overline{O_{oc}C} = \left(-\frac{1}{f'_{ob} + f'_{oc}} + \frac{1}{f'_{oc}}\right)^{-1} = \boxed{\frac{f'_{oc}(f'_{ob} + f'_{oc})}{f'_{ob}}}$$

Grandissement :

$$\gamma = \frac{\mathcal{D}'_o}{\mathcal{D}_o} = \frac{O_{oc}C}{O_{oc}O_{ob}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{D}'_o = \mathcal{D}_o \cdot \frac{f'_{oc}}{f'_{ob}}}$$



(c) Sur le cercle oculaire, car c'est là que l'on collecte le plus de lumière.

(d) Il joue sur la luminosité de l'image de l'image.

4)

	Lune	Vénus	Mars
Distance (m)	$3{,}82 \cdot 10^{8}$	$8{,}12 \cdot 10^{10}$	$7{,}85 \cdot 10^{10}$
Diamètre (m)	$3{,}52 \cdot 10^{6}$	$1{,}21 \cdot 10^{7}$	$6{,}79 \cdot 10^{6}$
$\alpha_{oeil} = \frac{Diam.}{Dist.}\ (rad)$	$9{,}2 \cdot 10^{-3}$	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$8{,}6 \cdot 10^{-5}$
$\alpha_{oeil} > 1'$?	Oui	Non	Non
$\alpha_{lunette} = G \cdot \alpha_{oeil}(rad)$	$3{,}7 \cdot 10^{-2}$	$6{,}0 \cdot 10^{-4}$	$3{,}5 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_{lunette} > 1'$?	Oui	Oui	Oui

Exercice n°6 - Photographie d'un papillon ★★☆

1) On a $\overline{OA} = -d_p$ et on cherche $\overline{OA'} = D$. La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{D} + \frac{1}{d_p} = \frac{1}{f'}$$

Ainsi,

$$\boxed{D = \frac{f'\,d_p}{d_p - f'} = 20 \text{ cm}}$$

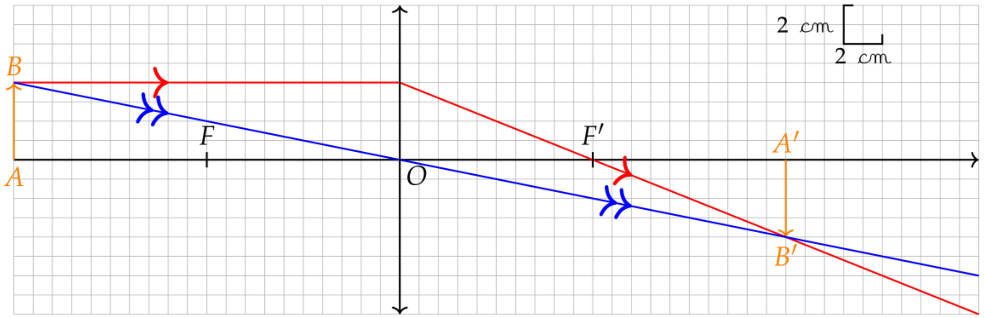
Le grandissement vaut :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{D}{d_p} = -1$$

L'image est de même taille et renversée. On a donc :

$$\boxed{h'_p = 4{,}0 \text{ cm}}$$

2)



3) Avec cet objectif, on réalise la suite de conjugaison suivante :

$$A \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} A_1 \xrightarrow[\mathcal{L}_2]{} P$$

Utilisons la relation de conjugaison de Descartes avec la lentille $\mathcal{L}_1$ avec $\overline{O_1A} = -d_p$.

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \overline{O_1A_1} = \frac{d_p f'_1}{d_p - f'_1}$$

On en déduit la distance entre A_1 et la seconde lentille.

$$\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e + \frac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}$$

On utilise finalement la relation de conjugaison de Descartes avec la seconde lentille.

$$\frac{1}{\overline{O_2P}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} \quad \Rightarrow \quad D' = \overline{O_2P} = \frac{\overline{O_2A_1}\, f_2'}{\overline{O_2A_1} + f_2'}$$

On remplace par la formule trouvée précédemment.

$$\boxed{D' = \frac{\left(-e + \dfrac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}\right) f_2'}{\left(-e + \dfrac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}\right) + f_2'} = 8{,}3\ \text{cm}}$$

Pour trouver la taille de l'image, utilisons les formules de grandissement. On remarque que :

$$\gamma = \frac{\overline{PB'}}{\overline{AB}} = \underbrace{\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}}_{\gamma_1} \times \underbrace{\frac{\overline{PB'}}{\overline{A_1B_1}}}_{\gamma_2} = \gamma_1\, \gamma_2$$

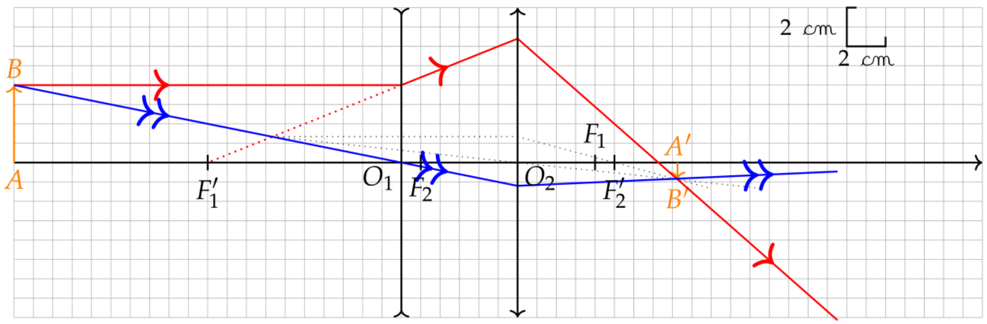
Ainsi,

$$\gamma = \underbrace{\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}}_{\gamma_1} \times \underbrace{\frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_2A_1}}}_{\gamma_2} = \left(\frac{\dfrac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}}{-d_p}\right) \times \left(\frac{D'}{-e + \dfrac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}}\right) = \frac{-D'/d_p}{-e\dfrac{d_p - f_1'}{d_p f_1'} + 1}$$

On en déduit :

$$\boxed{h_p' = -h_p \times \frac{D'/d_p}{-e\dfrac{d_p - f_1'}{d_p f_1'} + 1} = 0{,}87\ cm}$$

4)

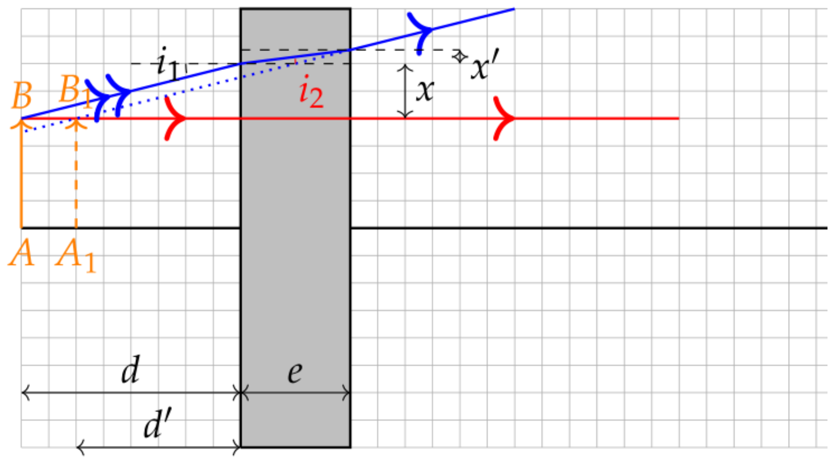


5) L'image avec le premier objectif est plus grande que celle avec l'objectif alternatif. On aura donc plus de détails avec l'objectif standard.

6) Lois Snell-Descartes de la réfraction :

- Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence.
- Les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 sont reliés par la relation : $\boxed{n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)}$

7)



8) On note i_1 l'angle d'incidence dans l'air, i_2 l'angle de réfraction dans le verre, et on définit sur le schéma ci-dessus les distances x, x', d et d'.

Dans les conditions de Gauss :

$$\tan(i_1) = i_1 = \frac{x}{d} = \frac{x + x'}{d' + e} \qquad \tan(i_2) = i_2 = \frac{x'}{e}$$

De plus, les lois de Snell-Descartes dans les conditions de Gauss donnent :

$$\mathrm{i}_1 = \mathrm{n}\,\mathrm{i}_2$$

On a donc :

$$\frac{x}{d} = \frac{x + x'}{d' + e} \Rightarrow d' + e = d\frac{x + x'}{x}$$
$$\Rightarrow d' = d\left(1 + \frac{x'}{x}\right) - e$$

De plus,

$$\mathrm{i}_2 = \frac{\mathrm{i}_1}{\mathrm{n}} \Rightarrow \frac{x'}{e} = \frac{x}{nd}$$
$$\Rightarrow \frac{x'}{x} = \frac{e}{nd}$$

Finalement, en combinant les deux expressions :

$$\boxed{d' = d\left(1 + \frac{e}{nd}\right) - e = d + e\left(\frac{1}{n} - 1\right)}$$

9) La distance entre le papillon et son image par la vitre est $\Delta d = d - d' = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et ne dépend pas de la position de la vitre. Ainsi, la position de la vitre n'influe pas sur la position de l'image du papillon par la vitre, ni par conséquent sur celle de cette image par la lentille de l'appareil photo.

10) Le capteur était placé pour faire la mise au point <u>sur</u> le papillon. Or l'image du papillon à travers la vitre n'est pas située au même endroit que le papillon lui-même. Par conséquent, l'image du papillon n'est plus visible sur le capteur. Il faut changer la position du capteur.

11) Pour que l'image du papillon soit toujours réelle, il faut que $\overline{OA'} > 0$. Calculons cette distance à l'aide de la relation de conjugaison de Descartes.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{\overline{OA_1} f'}{\overline{OA_1} + f'} > 0$$
$$\Rightarrow \overline{OA_1} + f' < 0 \text{ car } \overline{OA_1} < 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\overline{OA_1} < -f'}$$

L'image n'est réelle que si l'image du papillon à travers la vitre se trouve avant le foyer principal objet.

<u>Remarque</u> : on retrouve simplement ici la condition Objet réel → Image réelle à travers une lentille convergente du cours.

12) On veut :

$$\overline{OA_1} = \overline{OA} + \overline{AA_1} < -f' \Rightarrow \overline{OA} < -\overline{AA_1} - f'$$
$$\Rightarrow \overline{OA} < -e\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f'$$

La distance minimale d_m entre O et le papillon pour être sûr de pouvoir observer une image sur le capteur (en le déplaçant éventuellement) lorsqu'il y a une vitre entre le papillon et le photographe est donc :

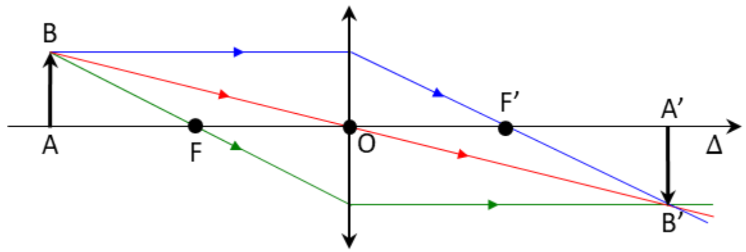
$$\boxed{d_m = e\left(1 - \frac{1}{n}\right) + f' = 10{,}3 \text{ cm}}$$

Exercice n°7 - [RP] Cascade inférieure du Yellowstone ★★☆

Commençons par faire un schéma de la situation. On note AB la cascade, située à une distance $\overline{OA}$ de l'appareil photo. On note A'B' l'image de AB sur le capteur CCD.

Le paramètre recherché est la hauteur $\overline{AB}$. Pour le trouver, on utilise la formule du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'}\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$



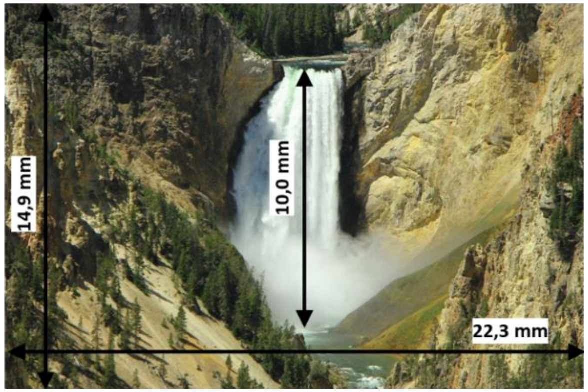
Pour trouver $\overline{AB}$, il faut donc trouver les trois paramètres suivants : $\overline{A'B'}$, $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$.

1) La distance $\overline{OA}$ se déduit de la carte accompagnée de sa légende. On trouve, $\boxed{\overline{OA} \simeq -1400 \text{ m}}$.

2) La distance $\overline{\mathrm{OA'}}$ peut se déterminer soit en supposant que la cascade est à l'infini, dans ce cas : $\overline{\mathrm{OA'}} = f' = 135\ \mathrm{mm}$; soit en faisant le calcul complet depuis une relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\mathrm{OA'}} = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} + \frac{1}{f'}\right)^{-1} \simeq 135\ \mathrm{mm}}$$

3) Finalement, la distance $\overline{\mathrm{A'B'}}$ correspond à la taille de l'image de la cascade sur le capteur. Or, on sait que le capteur mesure 14,9 mm de hauteur.



On en déduit donc :

$$\overline{\mathrm{A'B'}} \simeq -10\ \mathrm{mm}$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}}\,\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OA'}}} = 104\ \mathrm{m}}$$

On n'oublie pas de commenter le résultat trouvé ! Ce résultat est parfaitement cohérent : il s'agit de la hauteur typique d'une grande cascade.

Remarque : la véritable hauteur est considérée être 106 m. On est donc très proche !