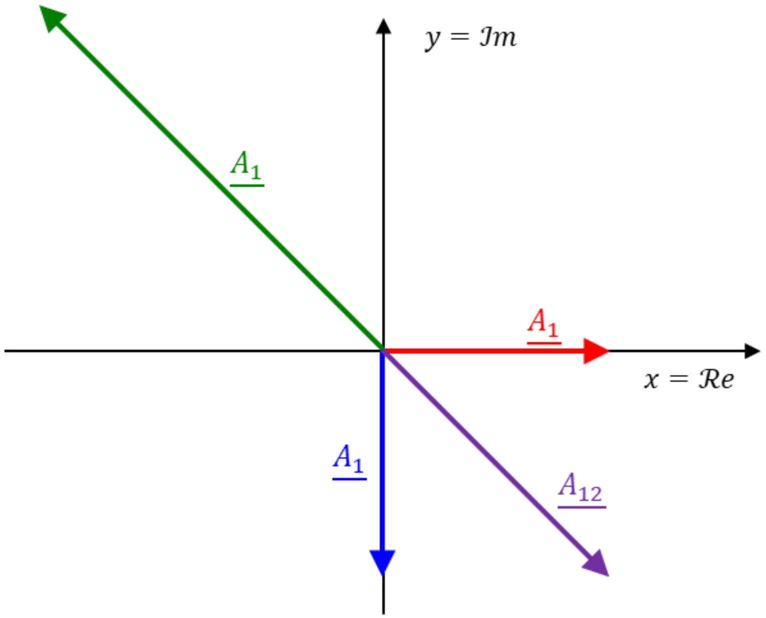
Signaux | Chapitre 2| Correction TD (S2)

Exercice n°1 - Représentation complexe ★★☆

1) Remarque : $s_2(t) = \sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$.



2) s_1 et s_2 sont en quadrature de phase.

3) Voir schéma.

4) Graphiquement,

$$\boxed{S_{12} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \sqrt{2}}$$

Vérifions-le par le calcul. On a :

$$\begin{aligned} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\omega t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\cos(\omega t) + \sqrt{2}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$s_{12}(t) = \sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$$

L'amplitude vaut bien $\sqrt{2}$.

5) s_3 et s_{12} sont en opposition de phase. Il s'agit donc d'interférences destructives.

Exercice n°2 - Nature de l'interférence ★☆☆

On a :

Point	Source de gauche	Source de droite	Déphasage entre les ondes	Interférences
A	Crête	Crête	En phase	Constructives
B	Creux	Creux	En phase	Constructives
C	Creux	Crête	Opposition de phase	Destructives
D	Crête	Crête	En phase	Constructives
E	Creux	Creux	En phase	Constructives

Exercice n°3 - Interférences dans une cuve à ondes ★★☆

1) Au voisinage de l'axe (Oy), les interférences sont constructives. On a donc des minima et maxima prononcés : le contraste est élevé.

2) D'après le texte introductif, les deux pointes frappent « en même temps ». Les deux ondes générées possèdent donc la même phase à l'origine, que l'on prendra nulle (choix arbitraire). Le déphasage de chaque onde en M vaut donc :

$$\phi_1 = \mathrm{kd}_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\mathrm{d}_1 \qquad \phi_2 = \mathrm{kd}_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\mathrm{d}_2$$

La différence de phase vaut :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{d}_1 - \mathrm{d}_2)$$

Pour que l'interférence soit destructive au point M, il faut que les ondes soient en opposition de phase. Ainsi :

$$\Delta\phi_{\text{dest.}} = \frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{d}_1 - \mathrm{d}_2) = \pi + 2\pi\mathrm{p} \qquad \text{avec } \mathrm{p} \in \mathbb{Z}$$

Ainsi,

$$\boxed{\delta = \mathrm{d}_1 - \mathrm{d}_2 = \lambda\left(\mathrm{p} + \frac{1}{2}\right)}$$

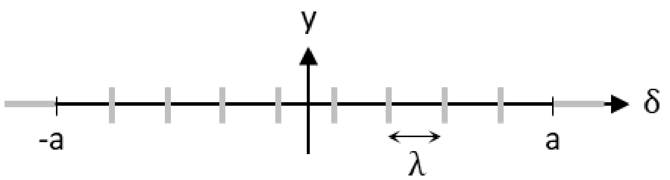
Il faut donc que la différence de marche δ soit un multiple demi-entier de la longueur d'onde.

3) Une onde issue de S_1 arrive sur S_2 en opposition de phase. Cette onde a donc parcouru une distance égale à un multiple demi-entier de la longueur d'onde.

$$\boxed{a = \lambda\left(\mathrm{n} + \frac{1}{2}\right)} \quad \text{avec } \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

4) Entre deux lignes de vibration minimale successives, la différence de marche (δ) varie d'une longueur d'onde.

Ainsi, on obtient (attention, sur le graphique, l'axe des abscisses est gradué en différence de marche).

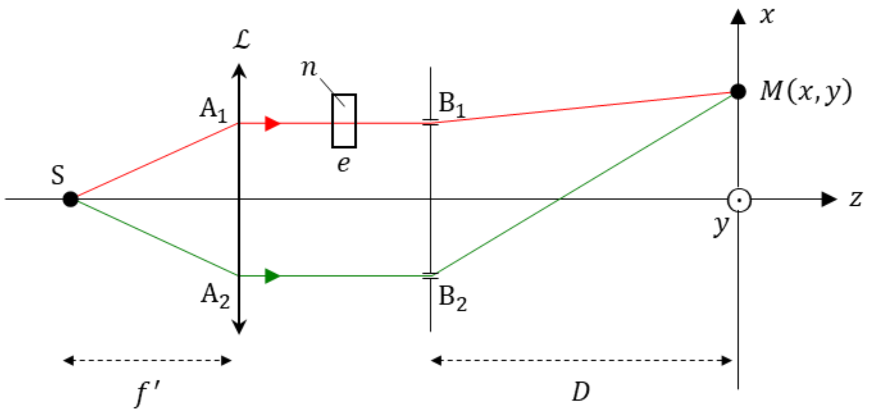


En comptant le nombre de lignes de vibration minimale, on en déduit que :

$$2\mathrm{a} = 9\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{a}}{\lambda} = \frac{9}{2}}$$

Exercice n°4 - Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre ★★☆

1) Les rayons partent du point focal objet. Ils ressortent donc parallèle à l'axe optique.



2) La différence de marche vaut :

$$\begin{aligned}\delta &= (SA_2B_2M) - (SA_1B_1M) \\ &= \underbrace{(SA_2) - (SA_1)}_{0} + \underbrace{(A_2B_2) - (A_1B_1)}_{(1-n)\,e} + \underbrace{(B_2M) - (B_1M)}_{ax/D}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D} - (\mathrm{n} - 1)e}$$

3) L'éclairement sur le mur vaut :

$$E(x) = 2E_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)\right)$$

On a des franches brillantes pour :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}\delta = 2\pi \cdot p \\ &\Rightarrow \quad \delta = \frac{ax_p}{D} - (\mathrm{n} - 1)e = p\lambda \\ &\Rightarrow \quad x_p = \frac{p\lambda D}{a} + (\mathrm{n} - 1)\frac{eD}{a}\end{aligned}$$

L'interfrange correspond à la distance entre deux franges.

$$\boxed{i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda D}{a}}$$

Lorsque l'on enlève la lame, la figure d'interférence se décale de 7 interfranges. Cela signifie que pour retrouver la même différence de marche δ, la position du point M sur l'écran doit varier de $7i$.

Ainsi (notons « avec » et « sans » les cas avec et sans la lame),

$$\delta_{avec} - \delta_{sans} = 0 = \left[\frac{ax_{avec}}{D} - (\mathrm{n} - 1)e\right] - \frac{ax_{sans}}{D}$$

Or,

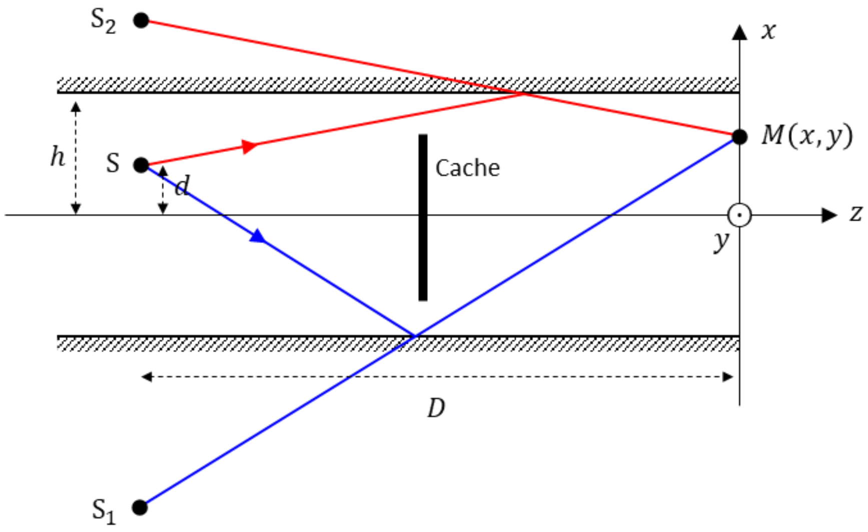
$$x_{avec} - x_{sans} = 7i = 7\frac{\lambda D}{a}$$

Ainsi,

$$7\lambda - (\mathrm{n} - 1)e = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = \frac{7\lambda}{n - 1} = 7\ \mu\mathrm{m}}$$

Exercice n°5 - Miroirs parallèles ★★☆

1) Les sources secondaires S_1 et S_2 sont les images de S à travers les deux miroirs.



2)

(a) La position des différents points :

$$S = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} -2h-d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2h-d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ D \end{pmatrix}$$

La différence de marche vaut :

$$\delta = (S_1M) - (S_2M)$$

Or,

$$\begin{aligned} S_1M &= \sqrt{(x+2h+d)^2 + y^2 + D^2} \\ &= D\sqrt{1 + \left(\frac{x+2h+d}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2} \\ &= D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x+2h+d}{D}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{D}\right)^2\right) \end{aligned}$$

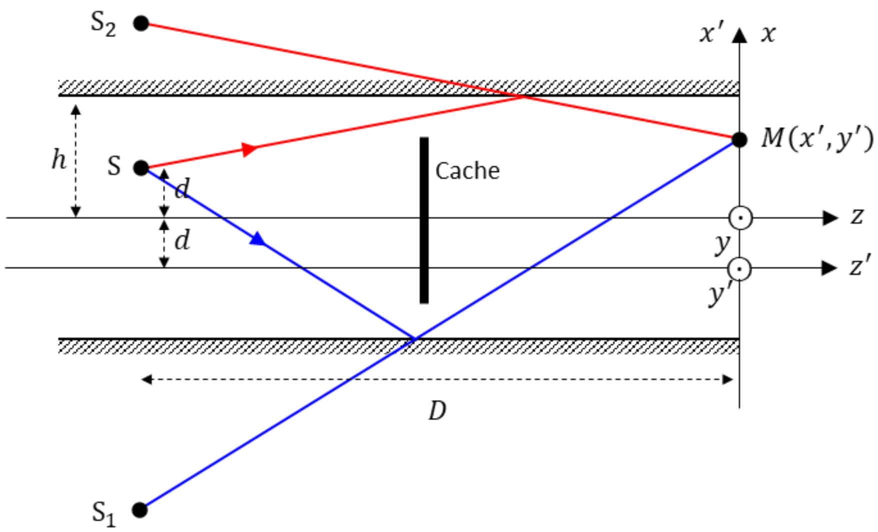
Et,

$$\begin{aligned} S_2M &= \sqrt{(x-2h+d)^2 + y^2 + D^2} \\ &= D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-2h+d}{D}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{D}\right)^2\right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \delta &= D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x+2h+d}{D}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{D}\right)^2\right) - D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-2h+d}{D}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{D}\right)^2\right) \\ &= \frac{(x+2h+d)^2 - (x-2h+d)^2}{2D} \\ &= \frac{4xh + 4hd}{D} \\ &= \boxed{\frac{4h}{D}(x+d)} \end{aligned}$$

(b) On appelle z' l'axe parallèle à z et passant par le milieu de S_1S_2. Il se trouve à une distance $-d$ de l'axe z.



Dans le repère $O'x'y'z'$, la position des différents points est :

$$S = \begin{pmatrix} 2d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} x' = x+d \\ y' = y \\ D \end{pmatrix}$$

On applique donc le cours en prenant $a = 4h$, la distance entre les sources secondaires. Ainsi,

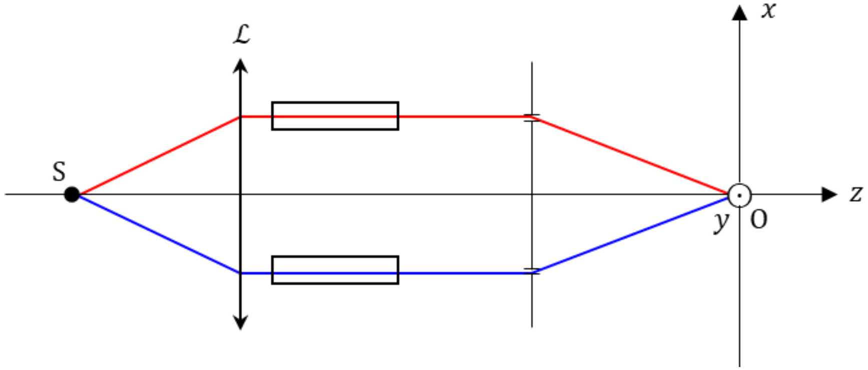
$$\delta = \frac{ax'}{D} = \frac{4h}{D}\, x'$$

Or, $x' = x + d$. On retrouve bien la même différence de marche.

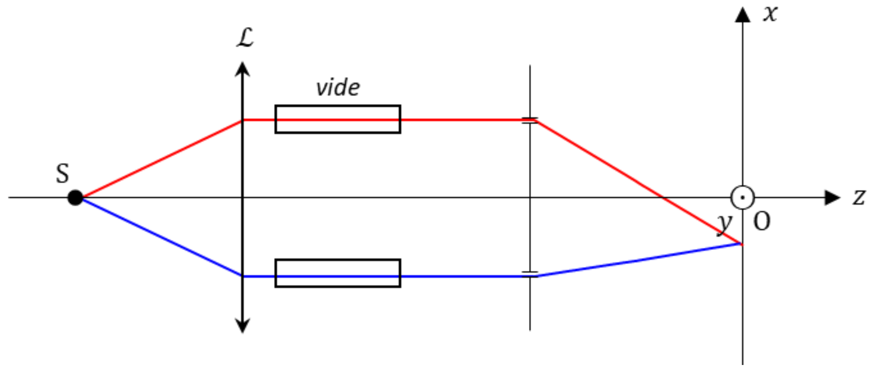
Exercice n°6 - Mesure de l'indice optique de l'air ★★☆

1) On s'intéresse à la frange brillante correspondant à une différence de marche nulle entre deux rayons.

Dans l'état initial, ce sont les deux rayons suivants qui possèdent une différence de marche nulle.



Après avoir fait le vide, le chemin optique du rayon rouge dans le tube T est plus court que celui du rayon bleu dans le tube T'. Il faut donc que le rayon rouge parcourt plus de distance après le tube pour arriver sur l'écran avec la même marche que le rayon bleu.



Les franges se déplacent donc vers le bas.

2) Pour des fentes d'Young, on rappelle que l'interfrange vaut :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

Dans ce problème, la différence de marche entre les deux rayons au niveau d'un point $M(x)$ vaut :

$$\delta = (\text{bleu}) - (\text{rouge}) = \underbrace{(n-1)\,L}_{\substack{\text{Tubes} \\ \text{cf. cours II.1.c}}} + \underbrace{n\frac{ax}{D}}_{\substack{\text{Trous d'Young} \\ \text{cf. cours II.4.b} \\ \text{avec } n_{air} = n}}$$

La différence de marche est donc nulle au point d'abscisse x_0 :

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -(n-1)\,L \times \frac{D}{an} = \left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdot \frac{LD}{a}$$

Or, l'énoncé nous dit que ce point (initialement en O) s'est décalé (vers le bas) de 101,5 interfranges (car on s'arrête sur une frange sombre). Ainsi,

$$x_0 = -101{,}5 \cdot i = -101{,}5 \cdot \frac{\lambda D}{a} = \left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdot \frac{LD}{a}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -101{,}5 \cdot \frac{\lambda}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \left(1 - 101{,}5\frac{\lambda}{L}\right)^{-1} \simeq 1 + 101{,}5\frac{\lambda}{L} = 1{,}00029}$$