Signaux | Chapitre 3 | Correction TD (S3)

Exercice n°1 • Représentation spectrale *cours*

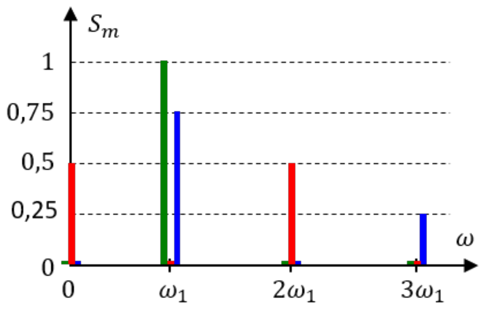
1) On utilise les relations trigonométriques :

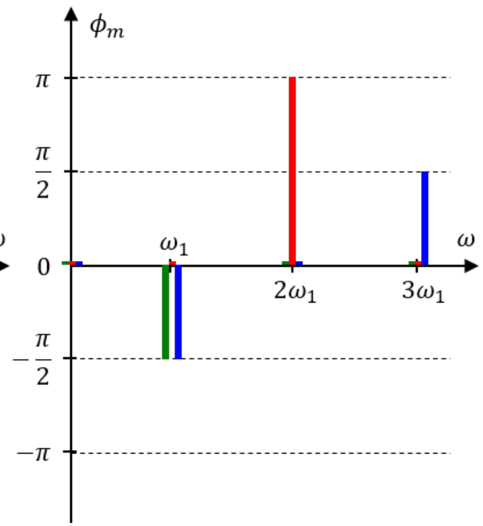
$$s_1(t) = \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$s_2(t) = \frac{1-\cos(2\omega_1 t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_1 t + \pi)$$

$$s_3(t) = \frac{3}{4}\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega_1 t) = \frac{3}{4}\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(3\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi (s_1 en vert, s_2 en rouge, s_3 en bleu) :





2) Avec la formule de cours :

$$S_{1,eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{2,eff} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{3,eff} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Exercice n°2 • Spectres ★☆☆

Voici la décomposition en série de Fourier des différents signaux.

Signal n°1 :

$$s_1(t) = 9 + 4\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\omega_1 t + \pi)$$

Signal n°2 :

$$S_{m,k} = \frac{2}{k\pi} \qquad \phi_k = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } k \text{ impair} \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

Signal n°3 :

$$S_{m,2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi} \qquad \phi_k = -\frac{\pi}{2}$$

Exercice n°3 • Valeurs efficaces ★★☆

1) Signal créneau :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\ dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

2) Signal triangle :

$$s(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{4t}{T} & \text{si } -\dfrac{T}{2} < t < 0 \\ 1 - \dfrac{4t}{T} & \text{si } 0 < t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)\ dt} \\ &= \sqrt{4 \cdot \frac{1}{T}\int_0^{T/4} \left(1 - \frac{4t}{T}\right)^2\ dt} \\ &= \sqrt{4 \cdot \frac{1}{T}\left[t + \frac{16}{3T^2}\,t^3 - \frac{4}{T}\,t^2\right]_0^{T/4}} \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

Exercice n°4 • Défi Python ★★☆

Exemple de programme :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.close('all')
N = 10 # Numéro du dernier harmonique
x = np.linspace(0, 2, 10000)
# Création des harmoniques du signal créneau
y = np.zeros(len(x))
for n in range(N):
  y += 4/np.pi * 1/(2*n+1) * np.sin(2*np.pi*(2*n+1)*x)
# Création du créneau réel
x2 = [0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1.5, 1.5, 2]
y2 = [1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1]
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x2, y2, c='r', ls='-', lw=4, alpha=0.5, label='Signal réel')
ax.plot(x, y, c='b', ls='-', lw=2, label='Fourier N = '+str(N))
ax.legend()
ax.grid(True)
```