Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

La calculatrice est autorisée

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Convertisseur numérique - analogique

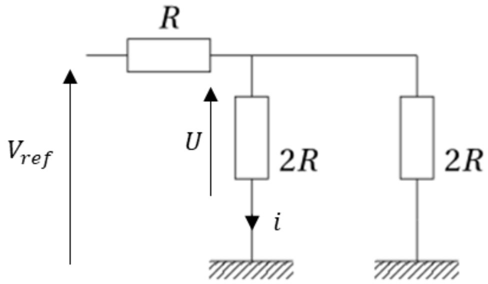
Un Convertisseur Numérique Analogique ou CNA convertit un nombre binaire en une tension ou un courant proportionnel à ce nombre. Nous allons présenter ici une des solutions techniques : le CNA à réseau.

I.1 - Travail préliminaire

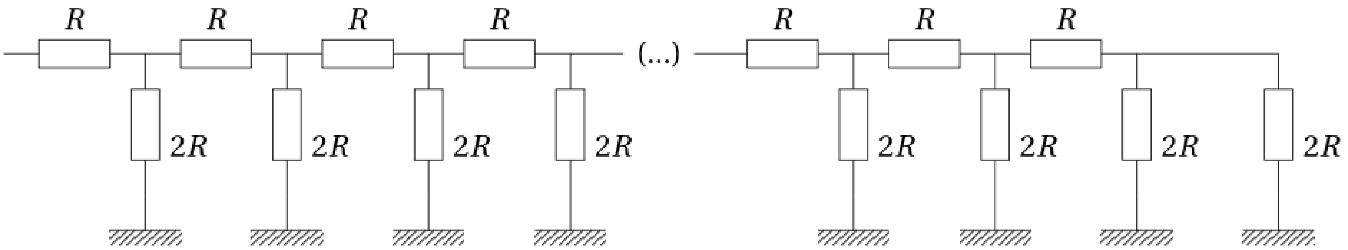
On considère le circuit ci-dessous.

1) Déterminer la résistance équivalente de l'ensemble.

2) Déterminer la tension U et le courant i en fonction de V_{ref} et R.

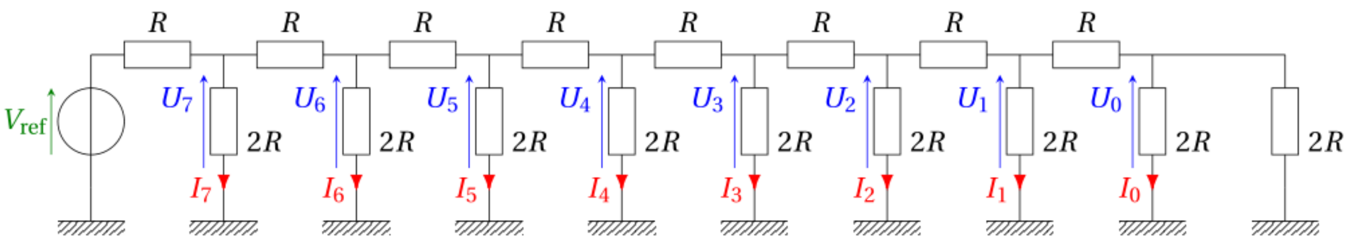


3) En déduire de la question 1 la résistance équivalente du montage ci-dessous.



I.2 - Étude du circuit de base du convertisseur

Le convertisseur numérique-analogique 8 bits dit en réseau repose sur le montage ci-dessous.



4) Déterminer l'expression de la tension U_7 en fonction de R et V_{ref}. En déduire celle du courant I_7.

5) Déterminer alors les expressions des tensions U_k et des courants I_k , $k \in [\![0\,,7]\!]$.

-- Fin de la partie I --

II - Guirlandes électriques

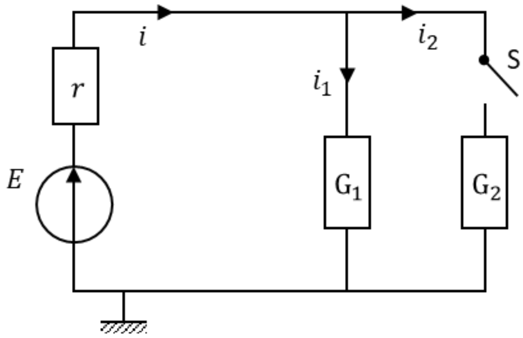
Dans cet exercice, on cherche à optimiser l'alimentation électrique d'un système comportant deux guirlandes électriques G_1 et G_2 , chacune étant modélisée par un conducteur ohmique de résistance identique $R_1 = R_2 = R$.

La première guirlande est dédiée à un fonctionnement continu. La seconde est associée avec un interrupteur S en série qui bascule de manière périodique afin de produire un clignotement.

On supposera dans cet exercice que la puissance lumineuse fournie par ces guirlandes est proportionnelle à la puissance électrique qu'elles reçoivent.

II.1 - Système de base

On considère dans un premier temps le circuit ci-dessous alimenté par un générateur réel de fem. E et de résistance interne r. **Les réponses aux différentes questions ne feront intervenir que E, r et R.**



On considère que l'interrupteur S est ouvert.

6) Quelle est la puissance reçue $\mathcal{P}_{2,o}$ par la seconde guirlande G_2 ?

7) Établir l'expression du courant i_o passant à travers le générateur puis l'expression de la puissance électrique $\mathcal{P}_{1,o}$ reçue par la guirlande G_1.

On considère désormais que l'interrupteur S est fermé.

8) Établir l'expression du courant i_f passant à travers le générateur.

9) À l'aide d'un pont diviseur de courant, déterminer les expressions de $i_{1,f}$ et $i_{2,f}$.

10) Quelles sont alors les puissances $\mathcal{P}_{1,f}$ et $\mathcal{P}_{2,f}$ reçues par les deux guirlandes ?

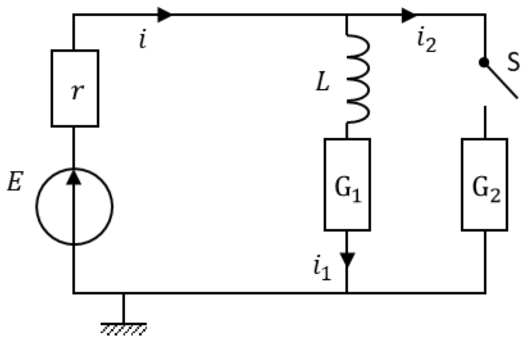
11) La puissance reçue par la première guirlande (celle qui ne doit pas clignoter) est-elle identique lors les deux régimes étudiés ? Conclure.

12) Comment doit-on choisir r par rapport à R pour limiter cet effet ? Cette condition est-elle vérifiée pour $r = 1\ \Omega$ et $R = 1\ \Omega$?

II.2 - Système amélioré

On considère maintenant le circuit ci-dessous afin de limiter la variation de puissance électrique reçue par la première guirlande donc la variation du courant i_1.

Une bobine d'inductance L a donc été ajoutée en série avec la première guirlande. L'interrupteur S est ouvert de manière périodique pour $t \in \left[0\,; \frac{T}{2}\right[$ et fermé pour $t \in \left[\frac{T}{2}\,; T\right[$.



13) En régime stationnaire, donner le schéma équivalent du nouveau montage.

On se place juste avant la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire en $t = \left(\frac{T}{2}\right)^-$, et on admet que le régime stationnaire a été atteint.

14) Déterminer la valeur de $i_1\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right)$. En déduire la valeur de $i_1\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right)$.

15) Déterminer les valeurs de $i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right)$ et de $i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right)$.

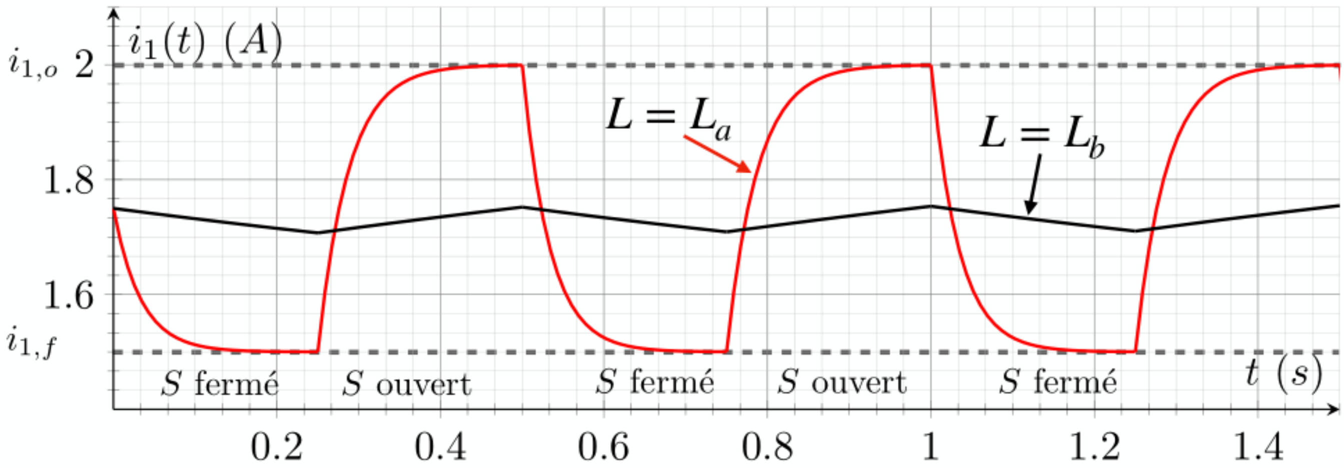
16) Établir l'équation différentielle dont i_1 est solution sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{T}{2}\right[$. On fera apparaitre un temps caractéristique τ_o.

17) On s'intéresse maintenant à l'intervalle $\left[\frac{T}{2}\,;T\right[$, lorsque l'interrupteur est fermé. Montrer que i_1 est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1+\frac{r}{R}\right)} \qquad \text{avec :} \qquad \tau_f = \frac{L\left(1+\frac{r}{R}\right)}{2r+R}$$

18) Donner la forme générale $i_1(t)$ de la solution de cette équation différentielle. On ne cherchera pas à déterminer la constante intervenant dans la solution.

On étudie expérimentalement les variations du courant $i_1(t)$ en mesurant la tension aux bornes de la guirlande G_1 à l'aide d'un oscilloscope et on obtient le résultat suivant pour deux valeurs différentes de l'inductance L. La résistance R vaut 2 Ω et la résistance r vaut 1 Ω.



19) Parmi les deux bobines d'inductance L_a et L_b, laquelle permet d'atteindre le régime stationnaire mentionné dans les questions 13 à 15 ?

20) Retrouver, par lecture graphique, la valeur de L_a.

21) Justifiez brièvement que $L_b \gg L_a$, sans chercher à déterminer sa valeur.

22) Quelle est la valeur de l'inductance à retenir parmi L_a et L_b pour minimiser les variations de puissance reçue par la première guirlande ?

-- Fin de la partie II --

I - Convertisseur numérique – analogique

I.1 - Travail préliminaire

1) La résistance équivalente vaut :

$$R_{eq} = R + 2R \parallel 2R = R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = R + R = \boxed{2R}$$

2) On combine les deux résistances $2R$ en dérivation (de résistance équivalente R) puis on applique le pond diviseur de tension :

$$U = \frac{R}{R+R} V_{ref} = \boxed{\frac{V_{ref}}{2}}$$

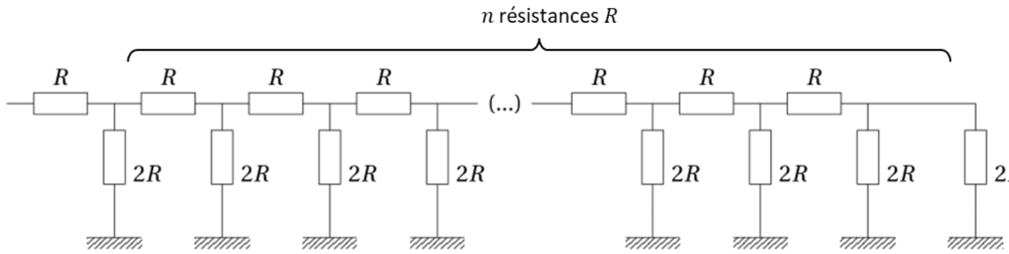
Par symétrie, chaque résistance $2R$ est parcourue par le même courant i. La résistance R est donc parcourue par un courant $2i$. La loi des mailles donne :

$$V_{ref} = R \times 2i + 2R \times i = 4Ri \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{V_{ref}}{4R}}$$

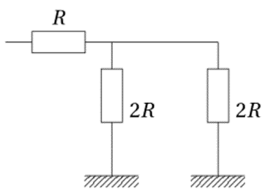
3) Montrons par récurrence que la résistance équivalente du circuit possédant n résistances R sur la branche du dessus vaut $2R$.

<u>Initialisation</u> : cas où $n = 1$. On sait que $R_{eq} = 2R$ d'après la question 1.

<u>Transitivité</u> : on suppose le cas n vrai et montrons que le cas $n + 1$ est toujours vrai.



Par hypothèse, ce montage est équivalent à au montage ci-dessous :

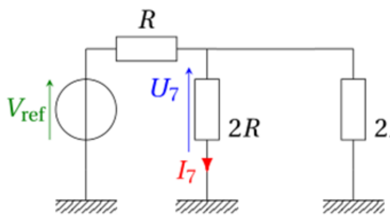


Ce dernier, d'après la question 1, est bien équivalent à une résistance $2R$.

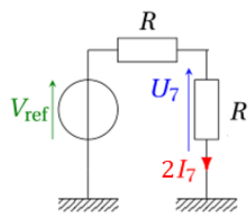
<u>Conclusion</u> : le montage est, quel que soit sa taille, équivalent à une résistance $2R$.

I.2 - Étude du circuit de base du convertisseur

4) D'après ce qui précède, le montage est équivalent à :



$\Leftrightarrow$



D'après ce qui précède :

$$\boxed{U_7 = \frac{V_{ref}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{i = \frac{V_{ref}}{4R}}$$

5) Montrons par récurrence que, pour $n \in [\![0\,,8]\!]$:

$$\boxed{U_{8-n} = \frac{V_{ref}}{2^n}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_{8-n} = \frac{V_{ref}}{2^n \times 2R}}$$

<u>Initialisation</u> : cas où $n = 1$ qui vient d'être fait.

<u>Transitivité</u> :

Le montage est équivalent à :

Avec le même raisonnement qu'à la question 20 :

$$U_{8-(n+1)} = \frac{U_{8-n}}{2} = \frac{V_{ref}}{2^n \times 2} = \boxed{\frac{V_{ref}}{2^{n+1}}} \quad \text{et} \quad i_{8-(n+1)} = \frac{U_{8-n}}{4R} = \frac{V_{ref}}{2^n \times 4R} = \boxed{\frac{V_{ref}}{2^{n+1} \times 2R}}$$

CQFD

Il suffit maintenant d'effectuer un changement d'indice pour répondre à la question posée. Posons : $k = 8 - n \Rightarrow n = 8 - k$. On obtient :

$$\boxed{U_k = \frac{V_{ref}}{2^{8-k}}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_k = \frac{V_{ref}}{2^{8-k} \times 2R}}$$

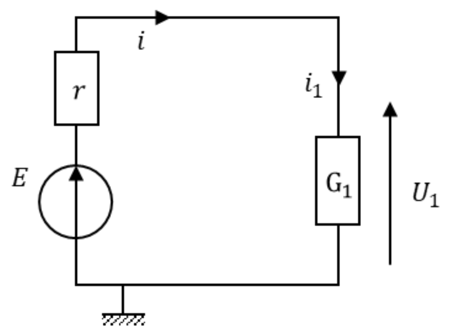
--- Fin de la partie I ---

II - Guirlandes électriques

II.1 - Système de base

6) L'intensité $i_{2,o}$ à travers D_2 est nulle. On en déduit : $\boxed{\mathcal{P}_{2,o} = 0}$.

7) Le circuit est équivalent à :



La loi des mailles donne :

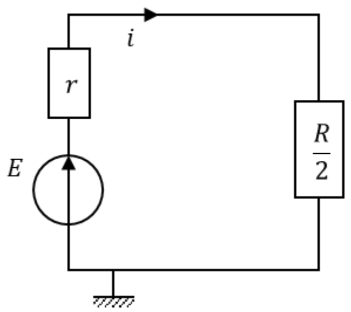
$$E = i_0(r + R) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_0 = \frac{E}{r + R}}$$

D'après la loi d'Ohm : $U_1 = R i_0$.

On en déduit la puissance reçue par G_1.

$$\boxed{\mathcal{P}_{1,o} = i_0 U_1 = R\left(\frac{E}{r + R}\right)^2}$$

8) Les deux guirlandes sont en dérivation. On peut les remplacer par une résistance équivalente $R_{eq} = \frac{R}{2}$.



La loi des mailles donne :

$$E = i_f\left(r + \frac{R}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_f = \frac{E}{r + \frac{R}{2}}}$$

9) On en déduit (avec $R_1 = R_2 = R$) :

$$\boxed{i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_f = \frac{E}{2r + R}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_f = \frac{E}{2r + R}}$$

10) Puissance électrique reçue par chaque guirlande : $\boxed{\mathcal{P}_{1,f} = \mathcal{P}_{2,f} = R\left(\frac{E}{2r+R}\right)^2}$

11) On a : $\mathcal{P}_{1,o} = R\left(\frac{E}{r+R}\right)^2 \neq \mathcal{P}_{1,f} = R\left(\frac{E}{2r+R}\right)^2$

La guirlande 1 va donc se mettre à clignoter, puissance la puissance lumineuse qu'elle émet varie périodiquement. Ce montage ne satisfait donc pas de cahier des charges.

12) Pour limiter cet effet, il faut que : $\boxed{r \ll R}$. Dans ce cas, où peut négliger r et il vient : $\boxed{\mathcal{P}_{1,o} \simeq \mathcal{P}_{1,f} \simeq R\left(\frac{E}{R}\right)^2 = \frac{E^2}{R}}$

Ce n'est pas le cas avec les valeurs données dans l'énoncé.

II.2 - Système amélioré

13) En régime stationnaire, la bobine est équivalente à un fil électrique. Le montage est donc équivalent à celui de la partie II.1.

14) Puisque le montage est équivalent à celui de la partie précédente, on sait que : $\boxed{i_1\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) = \frac{E}{r+R}}$

Le courant à travers une bobine étant toujours continu, on en déduit : $\boxed{i_1\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right) = \frac{E}{r+R}}$

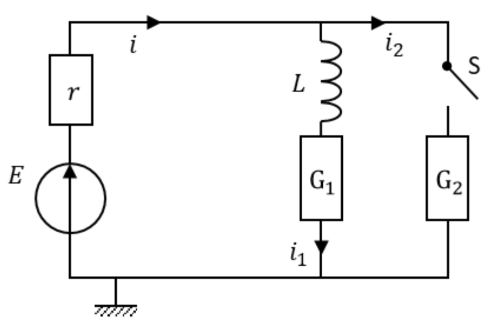
15) L'interrupteur étant ouvert, on a : $\boxed{i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) = 0}$

Chercherons $i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right)$. La loi des mailles donne : $E = ri + Ri_2$

Avec la loi des nœuds : $E = r(i_1 + i_2) + Ri_2 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{E - ri_1}{r+R}$

On en déduit : $\boxed{i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right) = \frac{E - r\left(\frac{E}{r+R}\right)}{r+R} = E\,\frac{R}{(r+R)^2}}$

16)



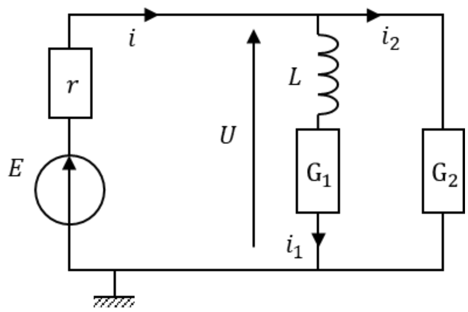
Loi des mailles :

$$E = ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 = i_1(r + R) + L\frac{di_1}{dt}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_o} = \frac{E}{L} \qquad avec \qquad \tau_o = \frac{L}{r + R}}$$

17)



Loi des mailles + loi des nœuds :

$$E = ri + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} = r(i_1 + i_2) + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt}$$

De plus,

$$U = Ri_2 = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad i_2 = i_1 + \frac{L}{R}\frac{di_1}{dt}$$

En combinant les deux équations, il vient :

$$\begin{aligned} E &= r\left(i_1 + i_1 + \frac{L}{R}\frac{di_1}{dt}\right) + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} \\ &= i_1(2r + R) + L\left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1 + \frac{r}{R}\right)} \qquad \text{avec :} \qquad \tau_f = \frac{L\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{2r + R}}$$

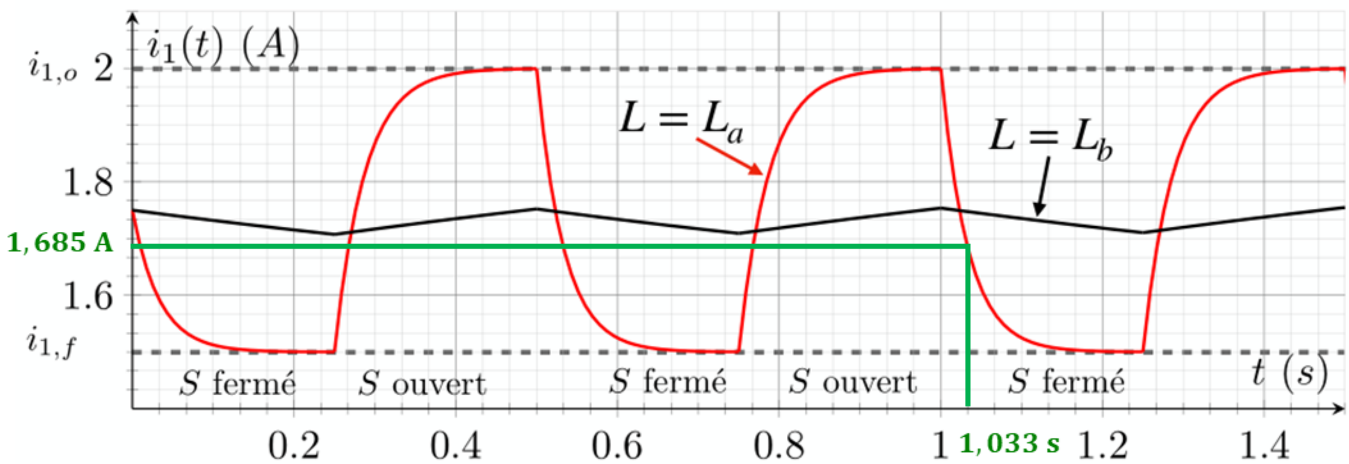
18) La forme générale de la solution de cette ED : $\boxed{i_1(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) + \frac{\mathrm{E}}{2r+R}}$

Avec A une constante.

19) Il s'agit de la bobine L_a (la charge de la bobine a le temps de se faire entièrement).

20) Le temps τ_f correspond au temps nécessaire pour réaliser 63 % de la décharge de la bobine.

Prenons le point de bascule en $t = 1$ s. L'intensité va passer d'une valeur initiale de 2 A à une valeur finale de 1,5 A. Il s'agit d'une chute de 0,5 A. Or, $0{,}5 \times 0{,}63 = 0{,}315$. On cherche donc le moment au l'intensité à chuter de 0,315 A, c'est-à-dire le moment où $i = 1{,}685$ A.



Ainsi, $\boxed{\tau_f = 0{,}033 \text{ s} = 33 \text{ ms}}$

On en déduit : $\boxed{\mathrm{L_a} = \tau_f \frac{2r+R}{1+\frac{r}{R}} = 88 \text{ mH}}$

21) Le temps caractéristique du régime transitoire avec L_b est très supérieur devant celui avec L_a. Donc $\boxed{L_b \gg L_a}$.

22) Il s'agit de L_b, car l'intensité $i_1(t)$ ne varie presque pas (et il en va de même pour la tension U).

-- Fin de la partie II ---