

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

La calculatrice est autorisée

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

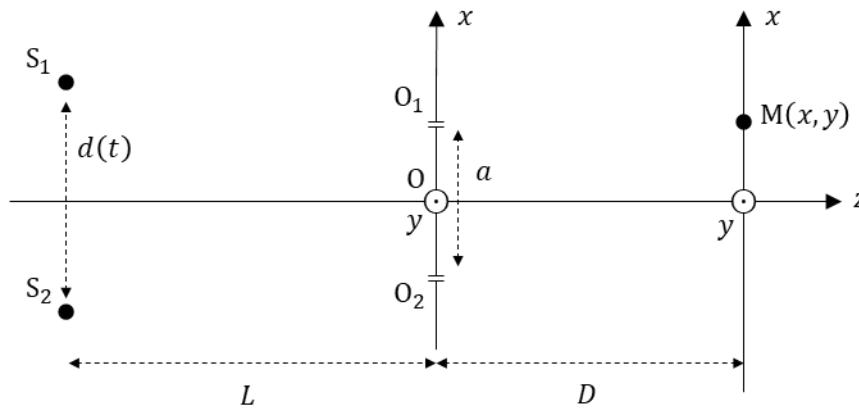
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Vitesse relative de déplacement de deux étoiles

Soit deux étoiles S_1 et S_2 , séparées d'une distance d et situées à une distance L de la Terre (dans le plan $y = 0$), éclairant un dispositif à trous d'Young (les trous sont supposés infiniment fins). On place en amont du dispositif un filtre vert (non représenté sur le schéma), afin de ne considérer que la longueur d'onde $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ provenant de chaque étoile. On admet que l'éclairement (ou intensité lumineuse) de chaque étoile vaut E_0 .

Les trous d'Young sont espacés d'une distance a , placé symétriquement par rapport au plan (Oyz) . Un écran d'observation est placé à une distance D des trous d'Young. Soit un point $M(x, y)$ situé sur l'écran et repéré par ses coordonnées x et y .

Les étoiles s'écartent de l'axe optique symétriquement, à une vitesse relative v_0 . À la date t , la distance qui les sépare est notée $d(t) = v_0 t$.



On suppose que :

$$L \gg d(t) \text{ et } a \quad \text{et} \quad D \gg a, x \text{ et } y$$

Données :

$$\lambda_0 = 500 \text{ nm} \quad a = 250 \text{ } \mu\text{m} \quad D = 5,0 \text{ m} \quad L = 9,5 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

1) Donner les coordonnées cartésiennes (x, y, z) des points S_1, S_2, O_1, O_2 et M . On rappelle que $z = 0$ est le plan contenant les trous d'Young (plan passant par O).

1.1 - Figure d'interférence créée par une étoile seule

Dans cette partie, seule l'étoile S_1 est prise en compte. On note :

$$\delta_1 = (S_1 O_1 M) - (S_1 O_2 M)$$

la différence de marche entre les deux rayons issus de S_1 et arrivant au point M .

2) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 de la différence de marche, montrer que :

$$\delta_{1a} = (O_1 M) - (O_2 M) = -\frac{ax}{D}$$

3) Donner sans refaire de calcul mais en argumentant rigoureusement votre raisonnement, l'expression de $\delta_{1b} = (S_1 O_1) - (S_1 O_2)$.

4) En déduire l'expression de δ_1 .

5) Rappeler le lien entre l'éclairement E (ou intensité lumineuse) d'une onde électromagnétique et l'amplitude A de son champ électrique.

6) Rappeler la formule de Fresnel, donnant l'éclairement observé sur l'écran en fonction de la différence de marche, dans le cas de deux sources ayant la même intensité lumineuse. En déduire l'expression de l'éclairement $E_1(x, t)$ que l'on observerait à l'écran si l'étoile 1 était seule.

7) On considère que le temps t est fixe. Tracer $E_1(x, t = 0)$. Quelle figure d'interférences observe-t-on ?

8) Déterminer l'interfrange i en fonction de λ_0 , D et a .

1.2 - Figure d'interférence créée par les deux étoiles

9) Sans refaire de calcul mais en argumentant rigoureusement votre raisonnement, donner l'expression de $\delta_2 = (S_2O_1M) - (S_2O_2M)$, la différence de marche entre les deux rayons issus de S_2 et arrivant au point M . En déduire l'expression de $E_2(x, t)$, l'éclairement observé sur l'écran si l'étoile S_2 était seule.

On considère désormais que les deux étoiles ont présentes.

La lumière issue de S_1 n'est pas cohérente (*notion vue en deuxième année*) avec celle issue de S_2 . Dans ce cas, on admet que l'éclairement résultant sur l'écran est égal à la somme des éclairements de chaque source.

$$E_{tot}(x, t) = E_1(x, t) + E_2(x, t)$$

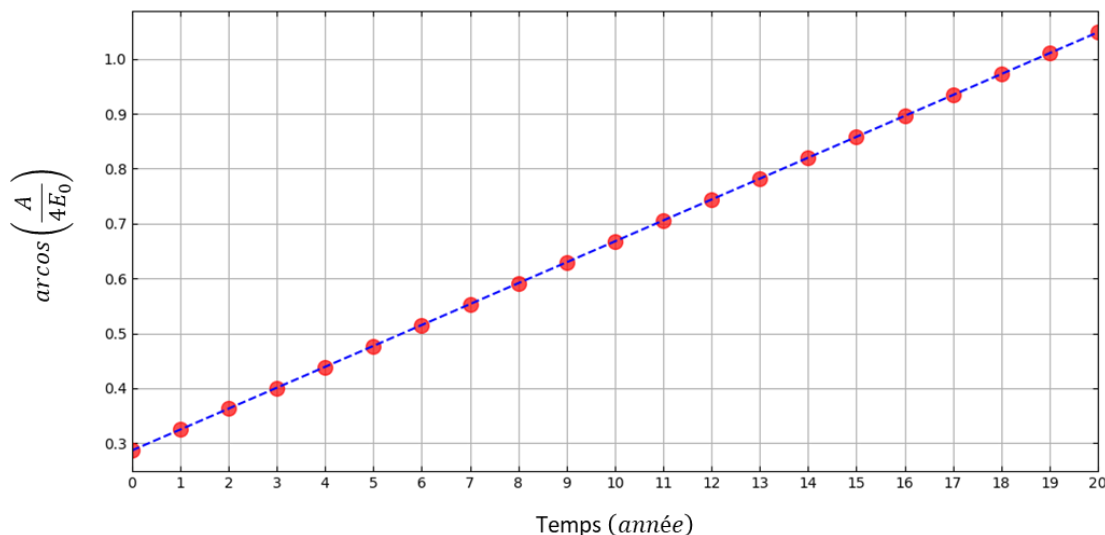
10) Montrer que l'éclairement observé à l'écran vaut :

$$E_{tot}(x, t) = 4E_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{av_0t}{2L}\right) \right]$$

On note λ_D la période spatiale sur l'écran de $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D}\right)$ et T la période temporelle de $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{av_0t}{2L}\right)$.

11) Tracer l'allure de $E_{tot}(x, t = cte)$ à un instant t quelconque et fixe. Que vaut l'amplitude, la période, et la valeur moyenne du signal ? Comment évolue la figure observée sur l'écran si on répète l'expérience année après année ?

12) Calculer λ_D (en mm) et T (en année) en considérant que la vitesse v_0 vaut $50 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.



Une équipe de recherche mesure tous les ans l'amplitude du signal de la figure d'interférences, sur une durée de 20 ans. La figure ci-dessus retranscrit les mesures effectuées : on trace $\arccos(A/4E_0)$ en fonction du temps, où A est l'amplitude de $E_{tot}(x, t)$ déterminée à la question 11.

13) Déterminer la valeur de v_0 en $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

----- Fin de la partie I -----

II - Circuit anti-résonant

On s'intéresse au circuit suivant, alimenté par une source de tension alternative de force électromotrice $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. La bobine idéale a une inductance $L = 0,1$ H, le conducteur ohmique une résistance $R = 10 \Omega$ et le condensateur une capacité $C = 1,0$ nF.

On note $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ l'intensité à travers le générateur.

14) Calculer l'impédance complexe \underline{Z} du dipôle AB et donner la relation entre $\underline{e}(t)$, $\underline{i}(t)$ et \underline{Z} .

15) En déduire que le module au carré de l'impédance du dipôle AB s'écrit :

$$Z^2(\omega) = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}$$

Un calcul non demandé permet de montrer que $Z(\omega)$ passe par un extremum pour une pulsation ω_1 vérifiant :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2R^2C}{L}} - \frac{R^2C}{L} \right) \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Avec les valeurs de l'énoncé, on remarque que : $\frac{R^2C}{L} = 10^{-6} \ll 1$. On peut alors simplifier l'expression de ω_1 à l'aide d'un développement limité. On donne le développement limité à l'ordre 2 en ε de $(1 + \varepsilon)^\alpha$, lorsque $\varepsilon \ll 1$:

$$(1 + \varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \varepsilon^2$$

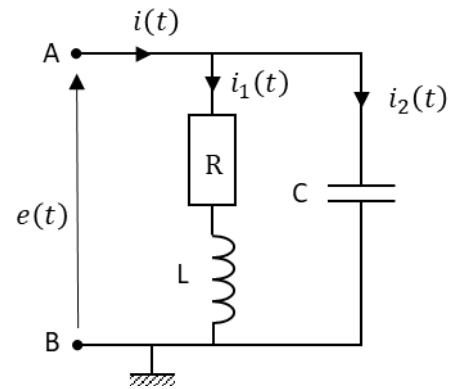
16) Effectuer un développement limité de $\sqrt{1 + \frac{2R^2C}{L}}$ à l'ordre 2 en $\frac{R^2C}{L}$. En déduire que :

$$\omega_1 \simeq \omega_0 (1 - f(R, L, C))$$

où $f(R, L, C)$ représente une fonction de R , L et C dont on précisera l'expression. Calculer numériquement $f(R, L, C)$.

Dans la suite, on considère que $\omega_1 \simeq \omega_0$.

17) Donner les limites de $Z(\omega)$ en 0 et en $+\infty$. Préciser la valeur de $Z(\omega_1) = Z_{\max}$. Justifier qu'on parle « d'antirésonance » en intensité dans ce cas.



----- Fin de la partie II -----

III - Choix d'un gabarit

On considère un signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$, dont la fréquence f peut varier entre 0 et 1 kHz auquel s'ajoute un bruit additif que l'on modélisera par un signal harmonique de haute fréquence $b(t) = B_0 \cos(\omega_b t)$, avec $f_b \simeq 100$ kHz.

On souhaite diminuer l'importance du bruit par rapport au signal. On se propose de réaliser cette opération via un filtre.

18) De quel type de filtre a-t-on besoin ? Tracez un gabarit raisonnable pour le filtre demandé.

On propose les cinq fonctions de transferts suivantes (en pulsation réduite $x = f/f_0$ et avec H_0 et Q des constantes).

$$\underline{H}(x) = \frac{jxH_0}{1 + jx} \quad \underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jx} \quad \underline{H}(x) = \frac{jxH_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}} \quad \underline{H}(x) = \frac{-x^2H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}} \quad \underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

19) Laquelle ou lesquelles peuvent convenir ? Dans le cas où plusieurs fonctions sont possibles, laquelle ou lesquelles préférez-vous ? Justifier les réponses.

20) Comment choisir adéquatement f_0 , H_0 et Q (le cas échéant) pour le filtre choisi ? Argumenter votre réponse.

----- Fin de la partie III -----

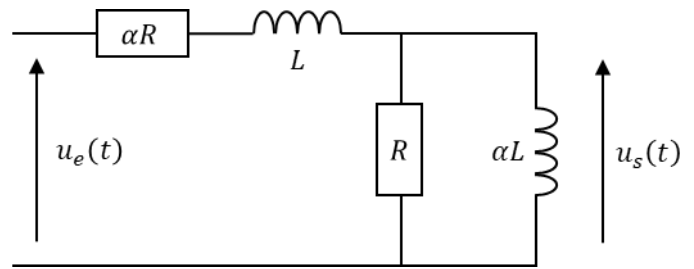
IV - Étude d'un filtre

On considère le circuit ci-contre contenant deux résistors de résistances respectives R et αR et deux bobines idéales d'inductances respectives L et αL .

Ce circuit peut être réglé en adaptant la valeur du paramètre $\alpha \in]0 ; 2]$. L'objectif de cet exercice est d'analyser l'influence de α sur les caractéristiques du filtre associé à ce circuit.

On donne $R = 1,00 \text{ k}\Omega$ et $L = 100 \text{ mH}$. On note : $j^2 = -1$.

Les parties 1 et 2 sont relativement indépendantes et doivent aboutir au même résultat pour $\underline{H}(\omega)$.



IV.1 - Étude à partir du régime transitoire

21) Montrer que $u_s(t)$ est solution de l'équation :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{R}{L} \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{du_s}{dt} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 u_s(t) = \frac{R}{L} \frac{du_e}{dt}$$

22) Vérifier l'homogénéité de cette équation.

23) Établir l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q .

On suppose que le signal $u_e(t)$ est un échelon de tension :

$$u_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On suppose de plus qu'en $t = 0^-$, un régime stationnaire est atteint. On cherche l'expression de $u_s(t)$ pour $t > 0$.

24) Déterminer les expressions de la tension aux bornes de chaque dipôle en $t = 0^+$ et de l'intensité du courant qui traverse chaque dipôle en $t = 0^+$.

25) Montrer que :

$$\dot{u}_s(0^+) = \frac{RE}{L}$$

26) Déterminer l'intervalle de valeur que prend le facteur de qualité Q lorsque $\alpha \in]0 ; 2]$.

On note λ le facteur d'amortissement et Ω la pseudo-pulsation de circuit. On rappelle que :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{\left| \frac{1}{4Q^2} - 1 \right|}$$

27) Donner la forme générale de la solution de cette équation différentielle, compte tenu des valeurs que peut rendre Q déterminées à la question 26. Donner ensuite l'expression complète de la solution de cette équation différentielle, compte tenu des conditions initiales déterminées aux questions 24 et 25.

28) Tracer l'allure de la solution.

Pour toute la suite de l'exercice, on se place en régime sinusoïdal forcé. Le générateur délivre une tension : $u_e(t) = E \cos(\omega t)$. On note : $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \phi)$ la tension de sortie.

29) Que devient l'équation différentielle en notation complexe ? En déduire la fonction de transfert associée au circuit $\underline{H}(\omega) = \underline{u_s}/\underline{u_e}$ reliant les tensions d'entrée et de sortie en régime sinusoïdal forcé, en fonction de j , Q et $x = \omega/\omega_0$.

IV.2 - Étude en régime sinusoïdal forcé

30) À l'aide de circuits équivalents, prédire la nature du filtre en régime sinusoïdal forcé en hautes et basses fréquences.

31) Après avoir replacer les dipôles par leur impédance respective, obtenir sa fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \underline{u_s}/\underline{u_e}$ sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

où le gain H_0 , le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 devront être exprimés en fonction de α , R et L .

IV.3 - Influence du paramètre α

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'influence du paramètre α sur le filtre des parties précédentes.

- 32) Montrer que ce filtre possède toujours une résonance. Pour quelle valeur x_{res} la résonance est-elle atteinte ?
- 33) Définir puis déterminer les deux pulsations de coupures x_c à -3 dB.
- 34) En déduire que la largeur de la bande passante vaut : $\Delta x_c = \frac{1}{Q}$.
- 35) Déterminer la valeur de α_m , valeur de α qui minimise la largeur de la bande passante.
- 36) Tracer le diagramme de Bode asymptotique et réel en gain et en phase de ce filtre pour la valeur de α_m trouvée précédemment.

IV.4 - Filtrage d'un signal d'entrée

- 37) Ce filtre peut-il se comporter comme un intégrateur, un dérivateur ou un moyenneur ? Le cas échéant, préciser les conditions à respecter.

Un signal créneau $s_{cré}(t)$ d'amplitude 1 V et de valeur moyenne nulle est la fonction T-périodique définie par :

$$s_{cré}(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

- 38) Déterminer la valeur efficace de ce signal créneau.

On rappelle les expressions de la décomposition en série de Fourier du signal créneau $s_{cré}(t)$ et du signal triangulaire $s_{tri}(t)$ d'amplitude 1 V et de moyenne nulle.

$$s_{cré}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega t)}{2n+1} \quad \text{et} \quad s_{tri}(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin((2n+1)\omega t)}{(2n+1)^2}$$

- 39) Tracer l'allure du spectre en amplitude et en phase de $s_{cré}(t)$.
- 40) Prévoir l'allure de la sortie $u_s(t)$ correspondant à un signal d'entrée de type créneau de pulsation $\omega = 1,0 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (ie. $x = 10$) pour la valeur de $\alpha = \alpha_m$.
- 41) Même question pour $\alpha = 0,01$.
- 42) On reprend alors la valeur de $\alpha = \alpha_m$ et on considère un signal d'entrée de type triangulaire de pulsation $\omega = 1,0 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($x = 10^{-2}$). Quelle sera alors l'allure du signal de sortie $u_s(t)$.

----- Fin de la partie IV -----

I - Vitesse relative de déplacement de deux étoiles

1) On a :

$$S_1 = \begin{pmatrix} d/2 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -d/2 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} \quad O_1 = \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad O_2 = \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ D \end{pmatrix}$$

I.1 - Figure d'interférence créée par une étoile seule

2) On a :

$$(O_1M) = O_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D \sqrt{1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2} \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2 \right] \right)$$

De même,

$$(O_2M) = O_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D \sqrt{1 + \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2} \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2 \right] \right)$$

On en déduit :

$$\delta_{1a} = (O_1M) - (O_2M) = -\frac{ax}{D}$$

3) On doit calculer : $\delta_{1b} = (S_1O_1) - (S_1O_2) = (O_1S_1) - (O_2S_1)$ d'après le principe de retour inverse de la lumière. Le calcul est donc identique à celui de la question précédente, à condition de substituer $M \rightarrow S_1$, c'est-à-dire de substituer $x \rightarrow d/2$, $y \rightarrow 0$ et $D \rightarrow L$. On en déduit :

$$\delta_{1b} = (S_1O_1) - (S_1O_2) = -\frac{ad}{2L}$$

4) Par définition :

$$\delta_1 = (S_1O_1M) - (S_1O_2M) = [(S_1O_1) + (O_1M)] - [(S_1O_2) + (O_2M)] = \delta_{1a} + \delta_{1b}$$

Ainsi :

$$\delta_1 = -\frac{ax}{D} - \frac{ad}{2L}$$

5) L'éclairement est proportionnel à la moyenne temporelle de l'amplitude au carré de l'onde.

$$E = K \langle A^2 \rangle$$

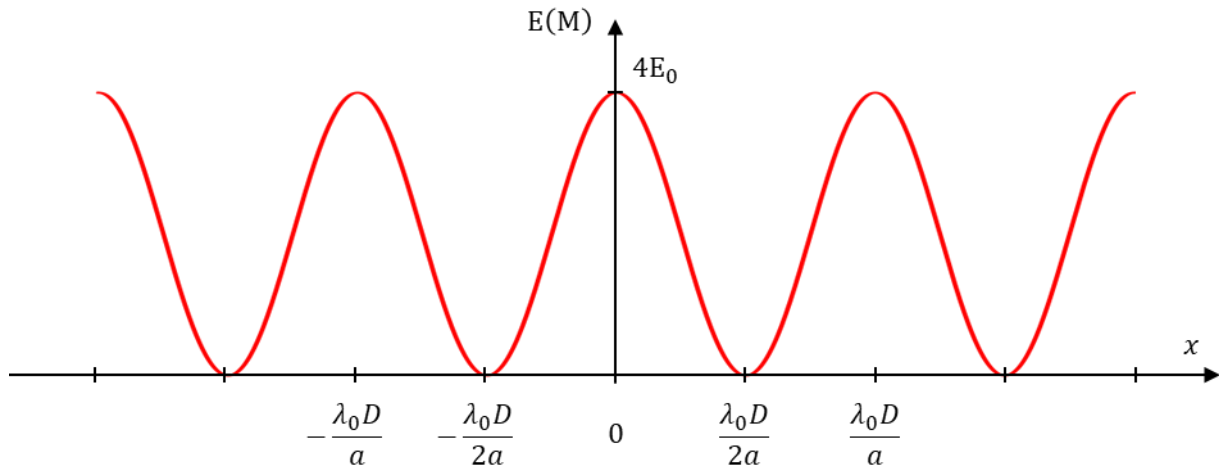
6) Formule de Fresnel, pour deux sources l'éclairement E_0 :

$$E = 2E_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) \right)$$

Ainsi, pour l'étoile n°1 :

$$E_1(x, t) = 2E_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_1 \right) \right) = 2E_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \left(\frac{x}{D} + \frac{v_0 t}{2L} \right) \right) \right)$$

7) On observe des franges rectilignes en $x = cte$.



8) L'interfrange est la position entre deux maxima :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

1.2 - Figure d'interférence créée par les deux étoiles

9) On a :

$$\delta_2 = -\frac{ax}{D} + \frac{ad}{2L} \quad \text{et} \quad E_2(x, t) = 2E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_2\right) \right) = 2E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \left(\frac{x}{D} - \frac{v_0 t}{2L}\right)\right) \right)$$

10) On somme les éclaircissements et on utilise la formule de trigonométrie :

$$\cos(p + q) + \cos(p - q) = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

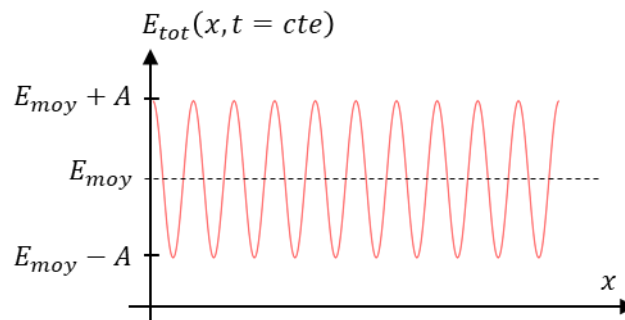
Ainsi :

$$\begin{aligned} E_{tot}(x, t) &= 2E_0 \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \left(\frac{x}{D} + \frac{v_0 t}{2L}\right)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \left(\frac{x}{D} - \frac{v_0 t}{2L}\right)\right) \right) \\ &= 2E_0 \left(2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{av_0 t}{2L}\right) \right) \\ &= 4E_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{av_0 t}{2L}\right) \right] \end{aligned}$$

11) Puisque $t = cte$, le second cosinus est constant. On doit donc tracer une fonction du type :

$$E_{tot}(x, t) = E_{moy} + A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D}\right) \quad \text{avec} : \quad \begin{cases} E_{moy} = 4E_0 \\ A = 4E_0 \left| \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{av_0 t}{2L}\right) \right| < E_{moy} \end{cases}$$

Où E_{moy} est la valeur moyenne du signal et A son amplitude. Sa période vaut : $\lambda_D = \frac{\lambda_0 D}{a}$.



Au fil du temps, la valeur moyenne du signal ne varie pas mais l'amplitude $A(t)$ dépend de t .

12) AN :

$$\lambda_D = \frac{\lambda_0 D}{a} = 17 \text{ mm} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\lambda_0 L}{av_0} = 7,6 \cdot 10^9 \text{ s} = 241 \text{ ans}$$

13) On a :

$$\arccos\left(\frac{A}{4E_0}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{av_0}{2L} \times t$$

Or, l'origine des temps choisie par l'équipe de recherche est arbitraire, et ne correspond pas nécessairement au moment où $d = 0$. On pose donc : $t = \text{Temps} + t_0$. Ainsi :

$$\arccos\left(\frac{A}{4E_0}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{av_0}{2L} \times \text{Temps} + cte$$

En traçant $\arccos\left(\frac{A}{4E_0}\right)$ en fonction du Temps, on s'attend bien à trouver une droite affine dont la pente vaut : $p = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{av_0}{2L}$. Graphiquement, on mesure :

$$p = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{av_0}{2L} = 0,038 \text{ année}^{-1} = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1} \Rightarrow v_0 = \frac{2Lp\lambda_0}{2\pi a} = 73 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

----- Fin de la partie I -----

II - Circuit anti-résonant

14) On associe les impédances :

$$\underline{Z} = \frac{e}{i} = \underline{Z}_C \parallel (R + \underline{Z}_L) = \left(j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}\right)^{-1} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

15) On a bien :

$$Z^2(\omega) = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}$$

16) Effectuons un développement à l'ordre 2 en $\frac{R^2C}{L}$ de la racine carrée :

$$\sqrt{1 + \frac{2R^2C}{L}} \approx 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2R^2C}{L} + \frac{1}{2!} \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{2R^2C}{L}\right)^2 = 1 + \frac{R^2C}{L} - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2C}{L}\right)^2$$

On en déduit que : $\omega_1^2 \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2C}{L}\right)^2\right)$. On prend alors la racine de cette expression et on effectue à nouveau un développement limité :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2C}{L}\right)^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{R^2C}{L}\right)^2\right) = \omega_0 \left(1 - \left(\frac{R^2C}{2L}\right)^2\right)$$

On en déduit donc la forme demandée avec :

$$f(R, L, C) = \left(\frac{R^2C}{2L}\right)^2 = 0,25 \cdot 10^{-12} \lll 1$$

On en déduit que ω_1 et ω_0 sont extrêmement proches.

17) On a :

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

Donc :

$$\boxed{Z(0) = R} \quad \text{et} \quad \boxed{Z(+\infty) = 0}$$

D'après la valeur limite $Z(+\infty)$, si la fonction admet un seul extremum, celui-ci est nécessairement un maximum (puisque $Z > 0$ par définition d'un module).

$$\boxed{Z_m(\omega_1 \simeq \omega_0) = \sqrt{\frac{R^2 + L/C}{0 + R^2 C/L}} = 10^7 \Omega = 10 \text{ M}\Omega}$$

Étant donné la valeur de $Z_m \gg R$, la courbe est très piquée. Une très grande valeur du module de l'impédance entraîne une très faible valeur de l'intensité, on est donc bien en présence d'une antirésonance.

----- Fin de la partie II -----

III - Choix d'un gabarit

18) Il faut un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure > 1 kHz et un gain « le plus faible possible » (au moins -40 dB pour avoir une bonne atténuation) à la fréquence f_b .

19) On regarde les limites BF et HF des différents filtres. Pour avoir un filtre passe-bas, il faut que : $\underline{H}(x \rightarrow 0) \neq 0$ et $\underline{H}(x \rightarrow +\infty) = 0$. Les deux seuls filtres passe-bas sont : $\boxed{\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1+jx}}$ et $\boxed{\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1-x^2+\frac{jx}{Q}}}$. Nous préférons le second car il s'agit d'un filtre d'ordre 2, le bruit sera donc mieux filtré.

20) La fréquence 1 kHz doit être dans la bande passante et la fréquence 100 kHz doit être très atténuée, donc hors de la bande passante. On va donc choisir une fréquence propre f_0 typiquement de l'ordre de $\boxed{5 \text{ kHz}}$: c'est au-dessus de 1 kHz pour que cette fréquence ne soit pas du tout atténuée, mais inférieur à $f_b/10$ pour avoir une atténuation de plus de 40 dB.

On ne veut pas atténuer les BF, donc $\boxed{H_0 = 1}$ idéalement.

On ne veut pas de résonance ou de coupure trop prononcée autour de $x = 1$, on veut donc $\boxed{Q = 1/\sqrt{2}}$ (cf. cours pour l'obtention du $1/\sqrt{2}$).

----- Fin de la partie III -----

IV - Lien entre régime sinusoïdal forcé et régime transitoire

IV.1 - Étude à partir du régime transitoire

21) Loi des mailles, que l'on dérive puisque l'on doit faire apparaître la dérivée de la tension d'entrée.

$$u_e = \alpha R i + L \frac{di}{dt} + u_s \quad \Rightarrow \quad \frac{du_e}{dt} = \alpha R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{du_s}{dt}$$

Loi des nœuds + relations des dipôles :

$$i = i_R + i_L \quad u_s = R i_R \quad u_s = \alpha L \frac{di_L}{dt}$$

On en déduit :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\alpha L} u_s$$

On injecte cette expression dans la loi des mailles :

$$\frac{du_e}{dt} = \alpha R \left(\frac{1}{R} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\alpha L} u_s \right) + L \left(\frac{1}{R} \frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{1}{\alpha L} \frac{du_s}{dt} \right) + \frac{du_s}{dt}$$

On multiplie par $\frac{R}{L}$ et on trouve :

$$\boxed{\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{R}{L} \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{du_s}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 u_s(t) = \frac{R}{L} \frac{du_e}{dt}}$$

22) On a :

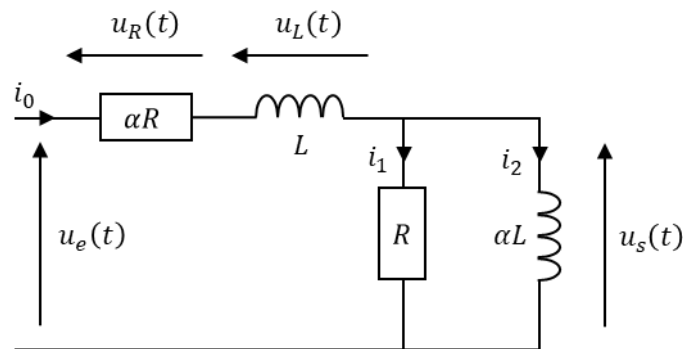
$$[u_s] = [u_e] = \text{Tension} \quad \left[\frac{L}{R}\right] = [t] = \text{Temps} \quad [\alpha] = 1$$

Chacun des quatre termes est homogène à une tension divisée par un temps au carré. L'expression est bien homogène.

23) On a :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}}}$$

24) Notations :



En $t = 0^-$:

- Bobines équivalentes à des fils. Donc : $u_L(0^-) = u_s(0^-) = 0$
- Loi d'Ohm : $i_1(0^-) = 0$
- Loi des mailles : $0 = u_R + u_L + u_s \Rightarrow u_R(0^-) = 0$
- Lois d'Ohm + loi des nœuds : $i_0(0^-) = i_2(0^-) = 0$

En $t = 0^+$:

- Continuité des intensités à travers les bobines : $\boxed{i_0(0^+) = i_2(0^+) = 0}$
- Loi des nœuds : $\boxed{i_1(0^+) = 0}$
- Lois d'Ohm : $\boxed{u_R(0^+) = u_s(0^+) = 0}$
- Loi des mailles : $\boxed{u_L(0^+) = E}$

25) On a :

$$\frac{du_s}{dt} = R \frac{di_1}{dt} = R \left(\frac{di_0}{dt} - \frac{di_2}{dt} \right) = R \left(\frac{u_L}{L} - \frac{u_s}{\alpha L} \right)$$

On applique cette formule en $t = 0^+$. Avec la question précédente, on trouve bien : $\boxed{\dot{u}_s(0^+) = \frac{RE}{L}}$.

26) Notons : $f(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}$. Ainsi : $Q = \frac{1}{f(\alpha)}$. On a : $f'(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha^2}$. Ainsi :

	0		1		2
$f'(\alpha)$		\ominus		\oplus	
$f(\alpha)$	$+\infty$	\searrow	3	\nearrow	$+\infty$
$Q(\alpha)$	0^+	\nearrow	$\frac{1}{3}$	\searrow	0^+

Donc $Q \in [0; 1/3]$.

27) On est en régime apériodique puisque $Q < 1/2$. Ainsi, la forme générale de la solution est (la solution particulière est nulle) :

$$u_s(t) = e^{-\lambda t} (A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t))$$

Avec les CI :

$$u_s(0^+) = A = 0$$

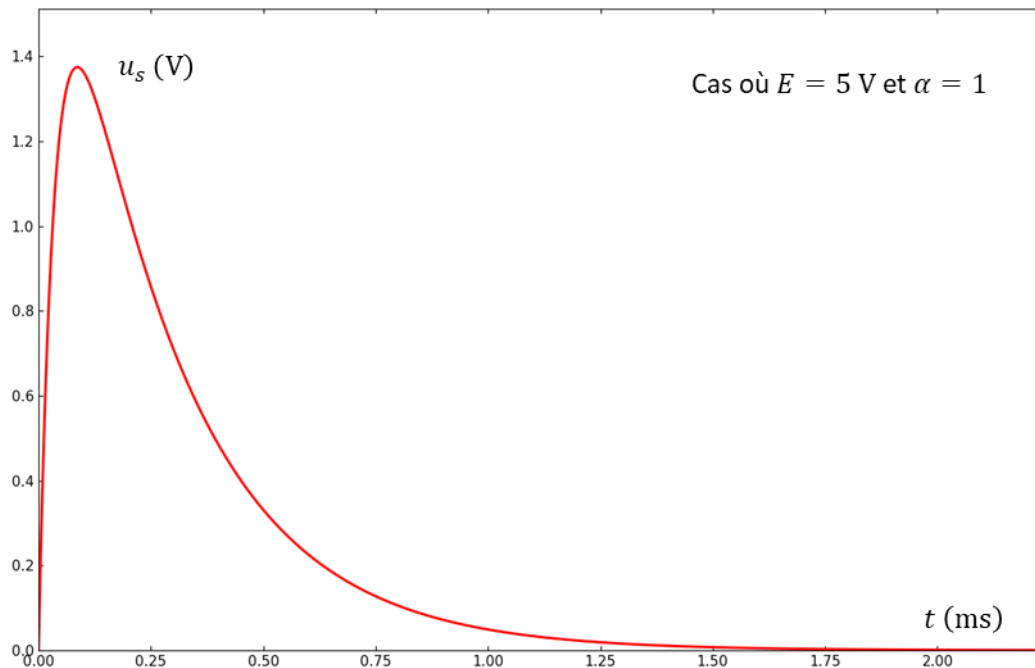
$$\dot{u}_s(0^+) = -\lambda A + B\Omega = \frac{RE}{L} \Rightarrow B = \frac{RE}{\Omega L}$$

On en déduit :

$$u_s(t) = \frac{RE}{\Omega L} e^{-\lambda t} \operatorname{sh}(\Omega t)$$

28) Pour le tracé, faire attention à :

- La fonction est nulle en 0^+
- La dérivée est positive en 0^+
- Aucune oscillation : la courbe ne traverse pas l'axe des abscisses.



29) Passage en complexe :

$$\left[(j\omega)^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right] \underline{u}_s = j\omega\omega_0 \underline{u}_e \Rightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{j\omega\omega_0}{(j\omega)^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} = \frac{jx}{(jx)^2 + \frac{jx}{Q} + 1} = \frac{Q}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

IV.2 - Étude en régime sinusoïdal forcé

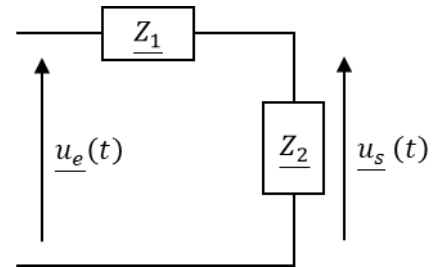
30) En HF, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouverts. Tous les courants sont donc nuls d'où $\underline{u}_s = R \underline{i}_R = 0$. En BF, les bobines sont équivalentes à des fils donc on a simplement $\underline{u}_s = 0$. Ce filtre atténue les BF et les HF. C'est donc un passe-bande.

31) On note $\underline{Z}_1 = \alpha R + j\omega L$ l'impédance équivalente de la résistance et de la bobine en série. On note :

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega\alpha L}$$

l'impédance équivalente de la résistance et de la bobine en dérivation. À l'aide d'un pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{u}_e \Rightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}$$



Ainsi,

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + (\alpha R + j\omega L) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega\alpha L} \right)} = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} + j\omega \frac{L}{R} + \frac{1}{j\omega \frac{L}{R}}} = \frac{1}{Q + j \left(x - \frac{1}{x} \right)} = \boxed{\frac{Q}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}}$$

Avec :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}} \quad \boxed{Q = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}}} \quad \boxed{H_0 = Q}$$

IV.3 - Influence du paramètre α

32) $|\underline{H}(\omega)|$ est maximal lorsque son dénominateur est minimal. On note :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{Q}{\sqrt{g(x)}} \quad \text{avec : } g(x) = 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2$$

Cherchons un minimum de $g(x)$.

$$\frac{dg}{dx} = 0 = 2Q^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x - \frac{1}{x} \right) \Rightarrow \boxed{x_{res} = 1}$$

Il existe toujours une résonance pour $x_{res} = 1$.

33) Pulsation de coupure :

$$|\underline{H}(x_c)| = \frac{\max(|\underline{H}(\omega)|)}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

34) On a :

$$\frac{Q}{\sqrt{g(x_c)}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2 = 2 \Rightarrow Q \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right) = \pm 1 \Rightarrow \boxed{x_c^2 \mp \frac{x_c}{Q} - 1 = 0}$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$$

Chaque équation possède deux solutions :

$$x_{c,\pm} = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

On garde uniquement les deux solutions positives. Puisque $\Delta > \frac{1}{Q^2}$, on a :

$$x_{c,\pm} = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{1}{Q} + \sqrt{\Delta} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta x_c = x_+ - x_- = \frac{1}{Q} = 1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}}$$

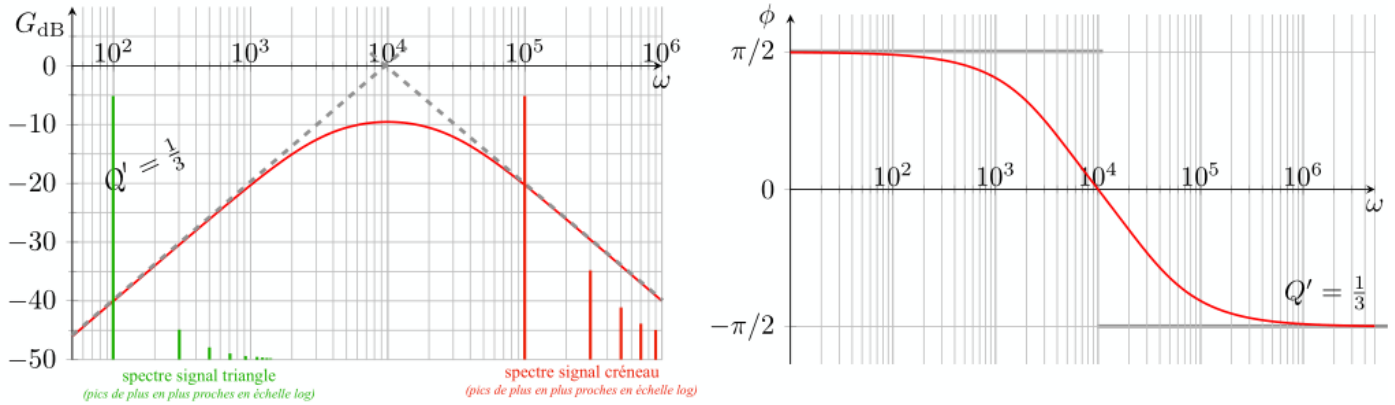
35) Cherchons α_m qui minimise Δx_c :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{Q} \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) = 1 - \frac{1}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_m = 1}$$

Car $\alpha > 0$.

36) On a :

	Gain	Phase
BF	$G_{dB} = 20 \log(x)$	$\phi = +\frac{\pi}{2}$
HF	$G_{dB} = -20 \log(x)$	$\phi = -\frac{\pi}{2}$
$x = 1$	$G_{dB} = 20 \log(Q) = -9,54 \text{ dB}$	$\phi = 0$



IV.4 - Filtrage d'un signal d'entrée

37) Le filtre se comporte comme un intégrateur pour des signaux dont le spectre est entièrement contenu dans la pente de -20 dB/dec .

Le filtre se comporte comme un dérivateur pour des signaux dont le spectre est entièrement contenu dans la pente de $+20 \text{ dB/dec}$.

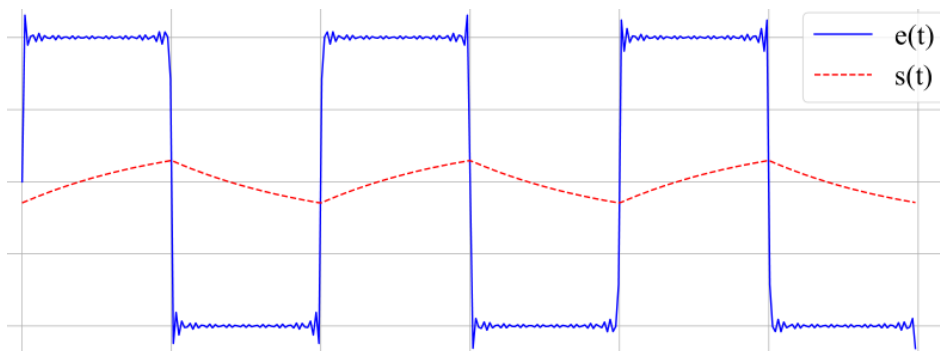
Le filtre ne peut pas se comporte comme un moyennneur étant donné qu'il filtre les BF.

38) On a :

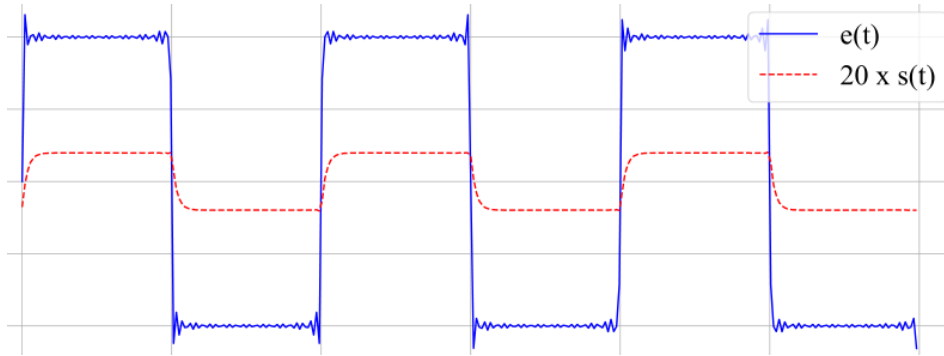
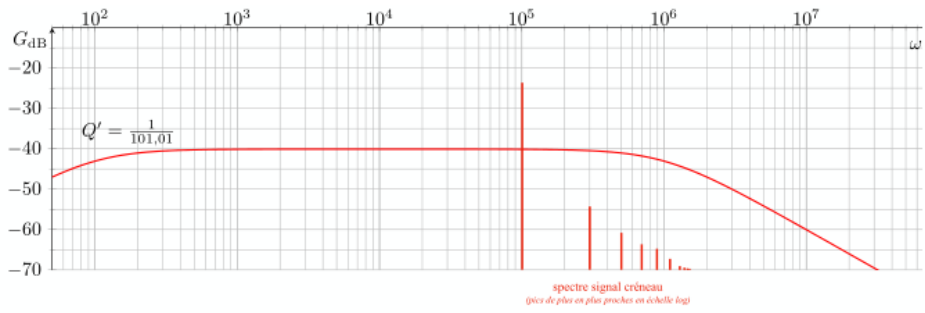
$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} + \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T dt} = \boxed{1 \text{ V}}$$

39) Graphes : Spectre en amplitude : $S_{m,n} = \frac{4}{\pi(2n+1)}$; spectre en phase : $\phi_n = -\frac{\pi}{2}$.

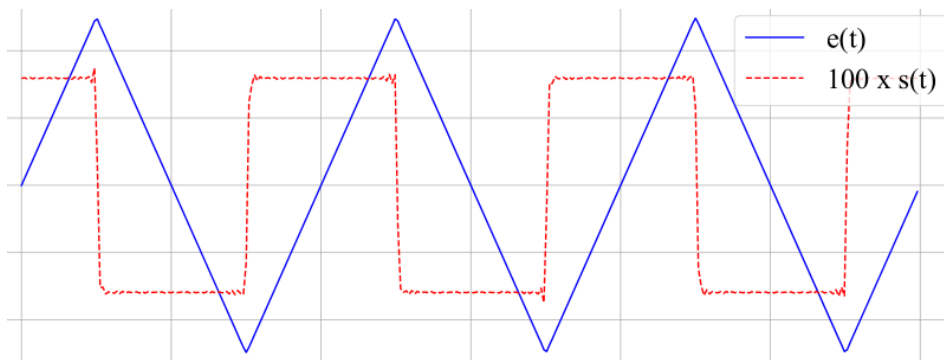
40) La fréquence fondamentale de ce signal est au-delà de la bande passante du filtre passe-bande. Ce dernier agit ainsi comme un filtre intégrateur et on obtient un signal quasi-triangulaire de faible amplitude.



41) On observe alors que les 5 premières harmoniques du signal sont dans la bande passante du filtre. Le signal va donc être vaguement conservé avec toutefois des transitions moins abruptes (le signal sera lissé). Il s'agit d'une charge de condensateur.



42) On revient sur le premier diagramme de Bode et on constate que presque tous les pics (de hauteur non négligeable) se trouvent dans une zone où le filtre joue le rôle d'un dérivateur. On va donc obtenir un signal du type créneau avec une amplitude très faible (gain moyen de -40 dB).



----- Fin de la partie IV -----