MPSI 2022/2023 | DS n°1

Ce sujet est constitué de **4 parties indépendantes**, que les candidats pourront traiter dans l'ordre de leur choix.

La calculatrice est autorisée

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

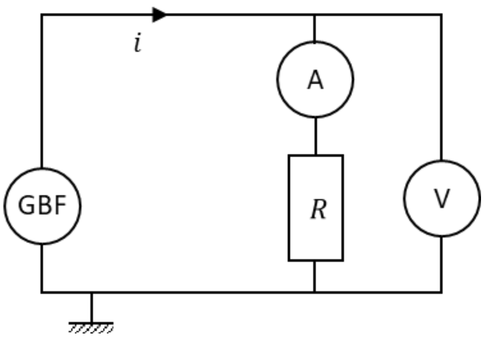
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Montages longue et courte dérivation

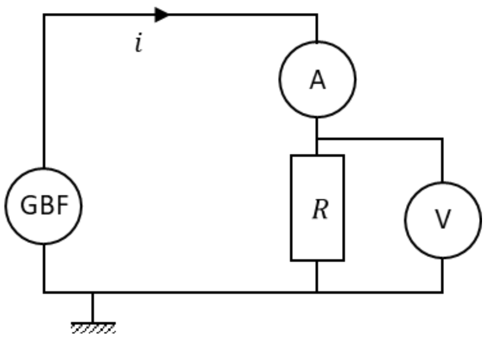
Pour mesurer la résistance d'un conducteur ohmique, on dispose d'un voltmètre, d'un ampèremètre et d'un générateur de tension de force électromotrice (fem) E.

On envisage les deux montages ci-dessous. Dans le montage courte dérivation, le voltmètre est branché en parallèle de la résistance. Dans le montage longue dérivation, le voltmètre est branché en parallèle de l'ensemble {résistance + ampèremètre}.

Montage longue dérivation



Montage courte dérivation



Dans cet exercice, nous allons considérer les résistances internes des composants. On rappelle que :

- un GBF réel est équivalent à l'association en série d'un générateur idéal de fem E et d'un résistance $R_g = 50\ \Omega$;
- un ampèremètre réel est équivalent à une résistance $R_A = 10\ \Omega$, parcourue par un courant d'intensité notée i_A (mesurée par l'appareil) ;
- un voltmètre réel est équivalent à une résistance $R_V = 10\ \mathrm{M\Omega}$, avec une tension à ses bornes notée U_V (mesurée par l'appareil).

On estime la résistance du conducteur ohmique par la relation :

$$R_{\text{mes}} = \frac{U_V}{i_A}$$

1) Reproduire sur votre copie le montage longue dérivation en remplaçant le GBF, l'ampèremètre et le voltmètre par leur équivalent. Indiquer sur le schéma où se trouve i_A et U_V.

2) Exprimer R_{mes} en fonction de R_g, R_A et/ou R_V.

3) À quelle condition a-t-on $R_{\text{mes}} \simeq R$?

4) Reprendre les premières questions pour le montage courte dérivation.

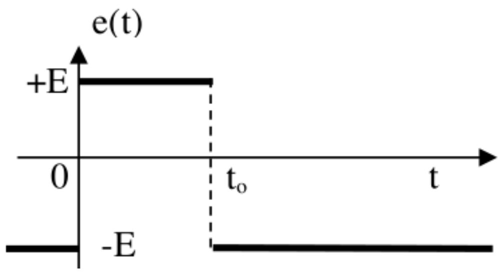
-- Fin de la partie I --

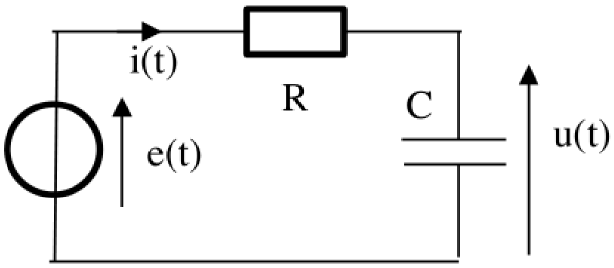
II - Réponse d'un circuit RC à une impulsion

On applique à l'entrée d'un circuit RC série un échelon de tension $e(t)$ décrit par :

- pour $t < 0$; $e(t) = -E$
- pour $0 < t < t_0$; $e(t) = +E$
- pour $t > t_0$; $e(t) = -E$

<u>Données</u> : $R = 10\ \text{k}\Omega$; $C = 10\ \mu\text{F}$.





5) Établir l'équation différentielle reliant la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur à la tension $e(t)$ appliquée sur le circuit.

6) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la tension $e(t)$ était depuis longtemps à la valeur $-E$, et qu'elle passe quasi-instantanément à la valeur $+E$. Donner, en justifiant vos réponses, la valeur de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ à l'instant $t = 0^-$ juste précédent $t = 0$.

7) Déterminer $u(t)$ pour $0 < t < t_0$.

8) On suppose que la durée t_0 de l'impulsion est telle que $u(t)$ atteigne la valeur $E/2$ à l'instant t_0. Exprimer t_0 en fonction de R et C et calculer sa valeur numérique.

9) Établir l'expression de $u(t)$ pour $t > t_0$. <u>Remarque</u> : lors de la résolution de l'équation différentielle, la détermination de la constante se fait en $t = t_0$ et non pas en $t = 0$.

10) Tracer une allure du graphe $u(t)$. Justifier la valeur vers laquelle tend $u(t)$ pour une durée grande.

--- Fin de la partie II ---

III - Alimentation d'une diode électroluminescente

Une diode électroluminescente (DEL, Figure 1) a pour propriété d'émettre de la lumière lorsqu'elle est traversée par un courant. Sa caractéristique est décrite par le graphe ci-dessous (Figure2). Elle est constituée d'une **branche bloquée**, pour la quelle $i = 0$ et d'une **branche passante** correspondant à $i > 0$. On note $V_s = 1{,}8$ V sa tension de seuil et $r = 1{,}0\ \Omega$ sa résistance dynamique. La diode s'éclairera de façon satisfaisante lorsqu'elle sera traversée par un courant d'intensité i compris entre 10 et 20 mA.

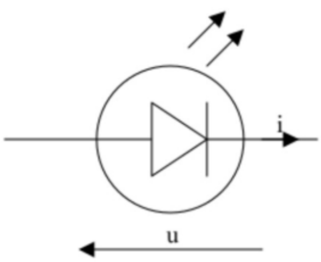


Figure 1. Symbole d'une DEL

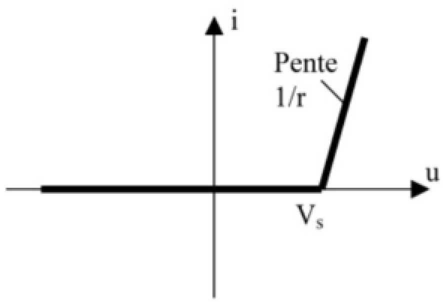


Figure 2. Caractéristique d'une DEL

11) Sur la branche bloquée (ie. lorsque $u < V_s$), à quel dipôle est équivalent la DEL ?

12) Montrer que sur la branche passante (ie. lorsque $u > V_s$), la LED est équivalente à un générateur réel de tension, dont on précisera la force électromotrice et la résistance interne.

La diode est branchée en série avec un générateur idéal délivrant une tension $E = 6{,}0$ V, et d'un résistor de résistance R (Figure 3).

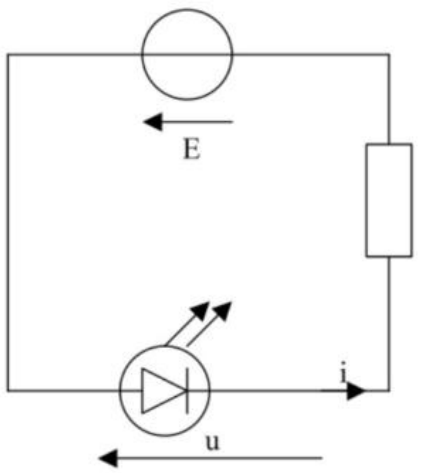


Figure 3. Premier circuit

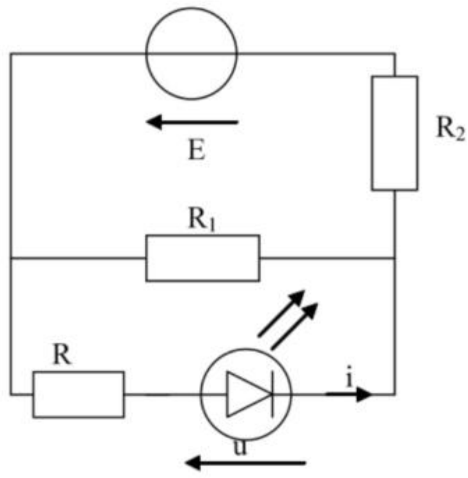


Figure 4. Second circuit

13) Montrer que la DEL fonctionne sur sa branche passante. En déduire le schéma équivalent du circuit, ne faisant apparaitre que des générateurs idéaux de tension et des résistances. Faire apparaitre E, V_s, i, R et r sur le schéma.

14) Expliciter l'intensité i qui la traverse. Déterminer littéralement puis numériquement la valeur R_0 de R permettant d'obtenir $i = i_0 = 15$ mA. Comparer R_0 et r.

15) Deux DEL identiques sont maintenant branchées en dérivation et insérées à la place de la DEL précédente, et dans le même sens. Expliciter en fonction de E, V_s, i_0 et r la nouvelle valeur R_0 que l'on doit donner à R pour obtenir une intensité de 15 mA dans chacune des deux diodes ? Calculer R_0 numériquement.

16) Évaluer la puissance $\mathcal{P}_R$ reçue par le résistor de résistance $R = R_0$, et la puissance $\mathcal{P}_d$ reçue par chacune des deux DEL.

17) Établir la relation existant entre la puissance $\mathcal{P}_g$ fournie par le générateur de fem E, $\mathcal{P}_R$ et $\mathcal{P}_d$. Commenter.

Le montage est modifié selon le schéma de la Figure 4, avec $R_2 = 1{,}0\ \Omega$.

18) Quelle valeur minimale doit-on donner théoriquement à R_1 pour que la diode électroluminescente fonctionne sur sa branche passante ?

19) Montrer que l'intensité i traversant la DEL vaut :

$$i = \frac{R_1 E - (R_1 + R_2)V_s}{(R_1 + R_2)(r + R) + R_1 R_2}$$

Faire l'application numérique pour $R_1 = 1{,}0\ \mathrm{k\Omega}$ et $R = 0{,}28\ \mathrm{k\Omega}$. Conclusion.

20) Calculer puis comparer numériquement la puissance $\mathcal{P}_g$ fournie par le générateur de fem E et la puissance $\mathcal{P}_d$ reçue par la diode.

--- Fin de la partie III ---

IV - Convertisseur numérique - analogique

Un Convertisseur Numérique Analogique ou CNA convertit un nombre binaire en une tension ou un courant proportionnel à ce nombre.

Donc l'équation de la sortie peut se mettre sous la forme :

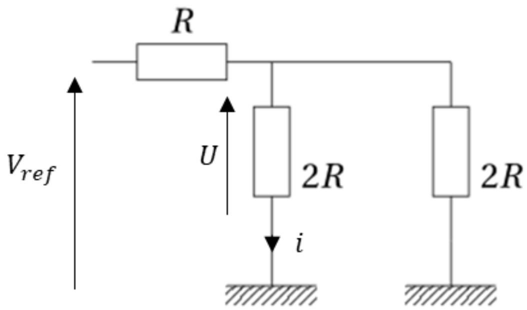
$$\begin{aligned} \text{Sortie analogique} &= k \text{ entrée numérique} \\ \mathrm{V_s} &= k\,\mathrm{N_e} \end{aligned}$$

où k est un facteur de proportionnalité qui dépend de chaque CNA. Si la sortie est une tension alors k est un facteur en volts, et si la sortie est un courant alors k est en ampères.

Nous allons présenter ici une des solutions techniques : le CNA à réseau.

IV.1 - Travail préliminaire

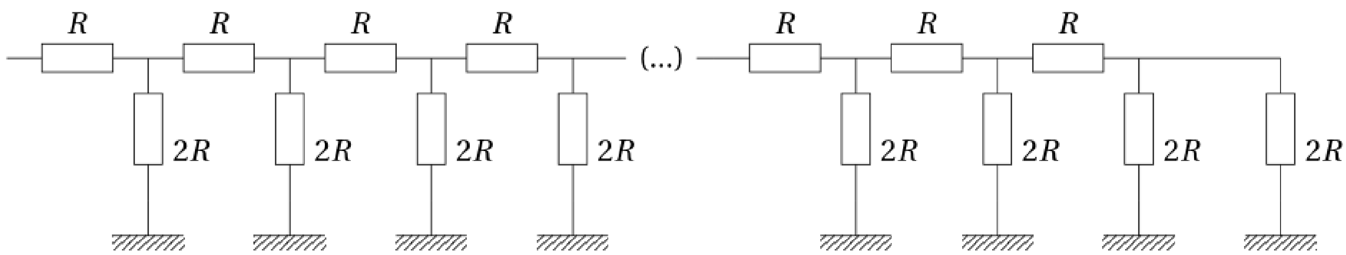
On ajoute, en parallèle d'une résistance $2R$ une seconde résistance $2R$ puis, une résistance R en série de l'ensemble (cf figure ci-dessous).



21) Déterminer la résistance équivalente de l'ensemble.

22) Déterminer la tension U et le courant i en fonction de V_{ref} et R.

23) En déduire de la question 21 la résistance équivalente de l'association de résistor ci-dessous.

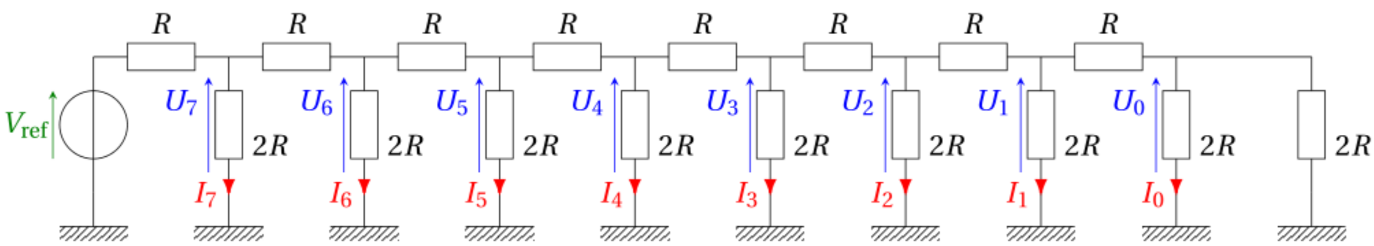


IV.2 - Étude du circuit de base du convertisseur

Le convertisseur numérique-analogique 8 bits dit en réseau repose sur le montage ci-dessous.

24) Déterminer l'expression de la tension U_7 en fonction de R et V_{ref}. En déduire celle du courant I_7.

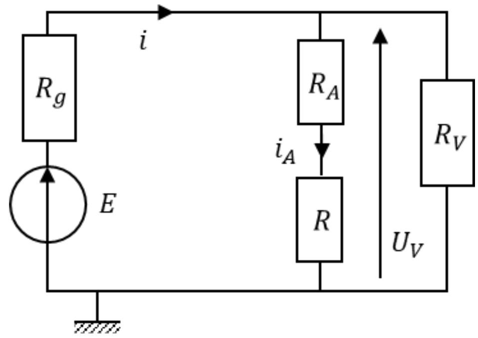
25) Déterminer alors les expressions des tensions U_k et des courants I_k , $k \in [\![0\,,7]\!]$.



--- Fin de la partie IV ---

I - Montages longue et courte dérivation

1)

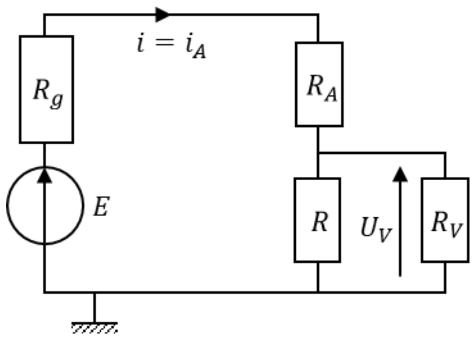


2) Par additivité des tensions :

$$U_V = U_{R_A} + U_R = (R_A + R)\, i_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{mes} = \frac{U_V}{i_A} = R + R_A}$$

3) On a $R_{\text{mes}} \simeq R$ si $\boxed{R \gg R_A}$.

4)



On associe en dérivation R et R_V. Cette résistance équivalente est parcourue par le courant i_A et possède une ddp U_V. La loi d'Ohm donne donc :

$$U_V = (R \parallel R_V)\, i_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{mes} = \frac{U_V}{i_A} = R \parallel R_V = \frac{R\, R_V}{R + R_V}}$$

On a $R_{\text{mes}} \simeq R$ si $\boxed{R \ll R_V}$.

--- Fin de la partie I ---

II - Réponse d'un circuit RC à une impulsion

5) Loi des mailles + loi d'Ohm :

$$e(t) = Ri(t) + u(t)$$

Avec la relation courant/tension d'un condensateur : $i = C\frac{du}{dt}$, on en déduit :

$$e(t) = RC\frac{du}{dt} + u(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{RC} = \frac{e(t)}{RC}}$$

6) En $t = 0^-$, le circuit a atteint un régime stationnaire. Le condensateur est donc équivalent à un circuit ouvert. On en déduit que $\boxed{i(0^-) = 0}$. La loi des mailles donne alors :

$$-E = Ri(0^-) + u(0^-) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(0^-) = -E}$$

7) Pour $0 < t < t_0$, l'équation différentielle s'écrit (avec $\tau = RC$) :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

La solution générale de cette ED vaut :

$$\boxed{u(t) = E + A\, e^{-t/\tau}}$$

La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue. On en déduit que :

$$u(0^-) = u(0^+) = -E = E + A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -2E}$$

Conclusion :

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - 2\, e^{-t/\tau}\right)}$$

8) Par définition de t_0, on a :

$$\frac{E}{2} = E\left(1 - 2\, e^{-t_0/\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 = 2 - 4e^{-t_0/\tau}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-t_0/\tau} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_0 = \tau \ln(4) = RC \ln(4) = 0{,}14 \text{ s}}$$

9) Pour $t > t_0$, l'équation différentielle s'écrit (avec $\tau = RC$) :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = -\frac{E}{\tau}$$

La solution générale de cette ED vaut :

$$\boxed{u(t) = -E + B\, e^{-t/\tau}}$$

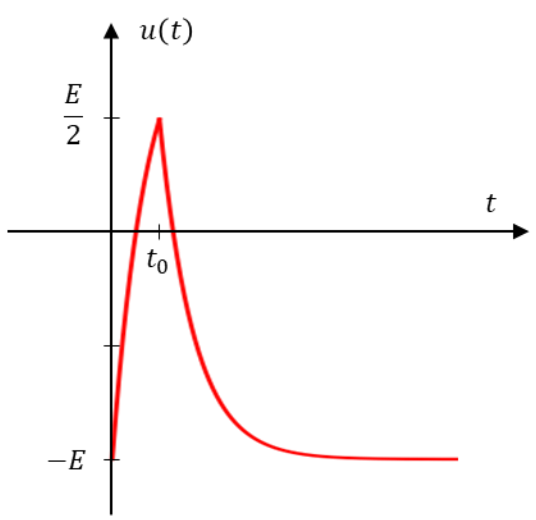
La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue. On en déduit que :

$$u(\mathrm{t}_0^-) = u(\mathrm{t}_0^+) = \frac{\mathrm{E}}{2} = -E + B\, e^{-t_0/\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{3E}{2}\, e^{t_0/\tau}}$$

Conclusion :

$$\boxed{u(t) = E\left(-1 + \frac{3}{2}\, e^{-(t-t_0)/\tau}\right)}$$

10) On a : $\boxed{u(+\infty) = -E}$. Graphe :



-- Fin de la partie II --

III - Alimentation d’une diode électroluminescente

11) Sur la branche bloquée, $i = 0$ pour toute valeur de u. C’est la caractéristique d’un interrupteur ouvert.

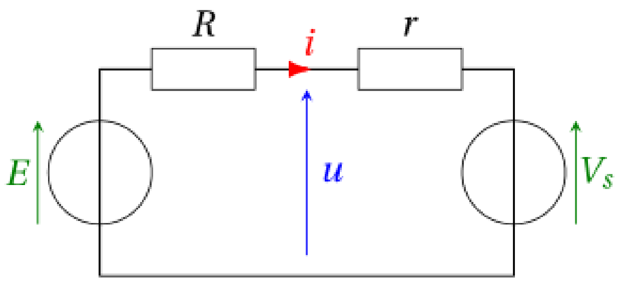
12) Un générateur réel de tension est l’association série d’un générateur idéal de fem E et d’une résistance R. La tension délivrée par le générateur vaut : $u = E - Ri$. Sa caractéristique est donc une droite affine de pente $1/R$ et passant par $u = E$ lorsque $i = 0$. C’est bien ce que l’on observe sur la branche passante, avec $\boxed{fem = V_s}$ et la résistance interne $\boxed{r}$.

13) Supposons que la DEL est bloquante. On a ainsi $i = 0$. La loi des mailles donne :

$$E = Ri + u \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = E = 6{,}0\ \mathrm{V} > V_s}$$

Cela vient contredire l’hypothèse de départ. On en déduit que la DEL est passante.

Schéma :



14) La loi des mailles du circuit donne :

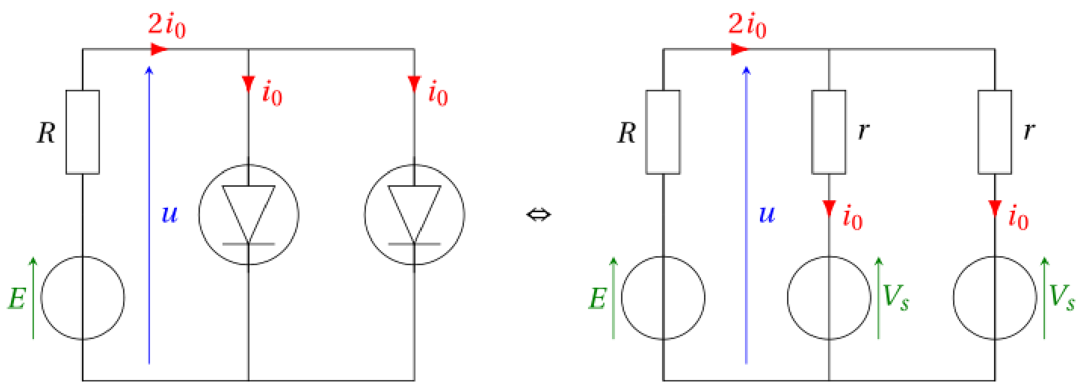
$$E - V_s = (R + r)\, i \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{E + V_s}{R + r}}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{R_0 = \frac{E - V_s}{i_0} - r = 0{,}28\ \mathrm{k\Omega}}$$

On constante que $\boxed{R_0 \gg r}$. On peut donc négliger la résistance dynamique de la DEL.

15) Les deux branches contenant les photodiodes sont identiques, donc traversées par le même courant i_0. D’après la loi des nœuds, le générateur est traversé par le courant $2\, i_0$.



On a donc :

$$u = E - 2R_0 i_0 = V_s + r i_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_0 = \frac{E - V_s}{2 i_0} - \frac{r}{2} = 0{,}14\ \mathrm{k\Omega}}$$

16) Par définition de la puissance **reçue**, on a :

$$\boxed{\mathcal{P}_R = R_0 (2 i_0)^2 = 0{,}12\ \mathrm{W}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P}_d = u\, i_0 = (E - 2R_0 i_0)\, i_0 = 0{,}027\ \mathrm{W}}$$

17) Par définition de la puissance **fournie**, on a :

$$\boxed{\mathcal{P}_g = 2Ei_0 = 0{,}18 \text{ W}}$$

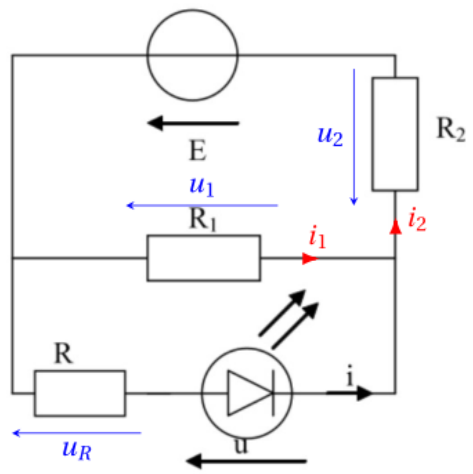
Montrons la relation de conservation de la puissance :

$$\mathcal{P}_R + 2\,\mathcal{P}_d = R_0(2i_0)^2 + 2(E - 2R_0 i_0)\,i_0 = 2Ei_0 = \mathcal{P}_g$$

La puissance fournie par le générateur est donc également à la somme des puissances reçues par la résistance et par les 2 DEL.

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_R + 2\,\mathcal{P}_d}$$

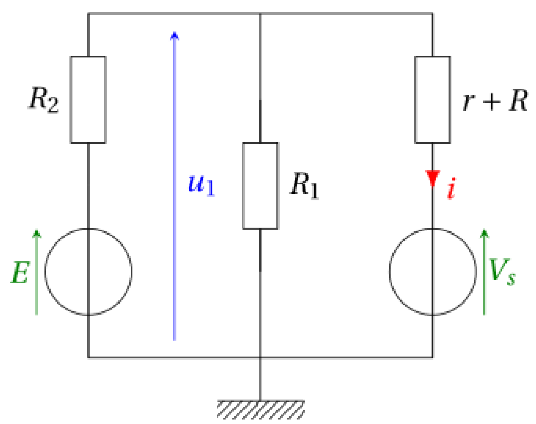
18) On utilise les notations ci-dessous :



On cherche la résistance R_1 minimale permettant à la DEL de fonctionner dans le sens passant. La tension aux bornes de la DEL vaut donc $V_s = u_R + u = u_1$ et elle est traversée par un courant $i = 0$. La loi des nœuds donne ainsi $i_1 = i_2$. On applique un pont diviseur de tension sur la résistance u_1 (attention ! On peut utiliser le pont uniquement quand $i = 0$, ce qui est le cas ici).

$$V_s = \frac{R_{1,min}}{R_{1,min} + R_2}\,E \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{1,min} = \frac{V_s}{E - V_s}\,R_2 = 0{,}43\ \Omega}$$

19) Schéma :



Loi des mailles : $u_1 = E - R_2 i_2 = R_1 i_1 = V_s + (r + R)\,i$

Loi des nœuds : $i_2 = i + i_1$

On a donc :

$$i = i_2 - i_1 = \frac{E - u_1}{R_2} - \frac{u_1}{R_1} = \frac{E - [V_s + (r + R)\,i]}{R_2} - \frac{V_s + (r + R)\,i}{R_1}$$

Rassemblons tous les termes en i à gauche du signe égal.

$$i\left(1+\frac{r+R}{R_2}+\frac{r+R}{R_1}\right)=\frac{E}{R_2}-\frac{V_s}{R_2}-\frac{V_s}{R_1}$$

On multiplie par $R_1 R_2$ puis on isole i.

$$i\,[\mathrm{R_1R_2}+(R_1+R_2)(r+R)]=ER_1-V_s(R_1+R_2)\quad\Rightarrow\quad \boxed{i=\frac{R_1E-(R_1+R_2)V_s}{(R_1+R_2)(r+R)+R_1R_2}=15\ \mathrm{mA}}$$

On retrouve le même courant qu'aux questions précédentes.

20) La diode est traversée par le même courant que précédemment, donc elle absorbe la même puissance $\boxed{\mathcal{P}_d=27\ \mathrm{mW}}$.

Le générateur fournie une puissance :

$$\mathcal{P}_g=E\,i_1=\frac{E}{R_1}u_1=\boxed{\frac{E}{R_1}[V_s+(r+R)\,i]=90\ \mathrm{mW}}$$

Les deux puissances sont du même ordre de grandeur.

-- Fin de la partie III --

IV - Convertisseur numérique - analogique

IV.1 - Travail préliminaire

21) La résistance équivalente vaut :

$$R_{eq}=R+2R\parallel 2R=R+\frac{1}{\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}}=R+R=\boxed{2R}$$

22) On combine les deux résistances $2R$ en dérivation (de résistance équivalente R) puis on applique le pond diviseur de tension :

$$U=\frac{R}{R+R}\,V_{ref}=\boxed{\frac{V_{ref}}{2}}$$

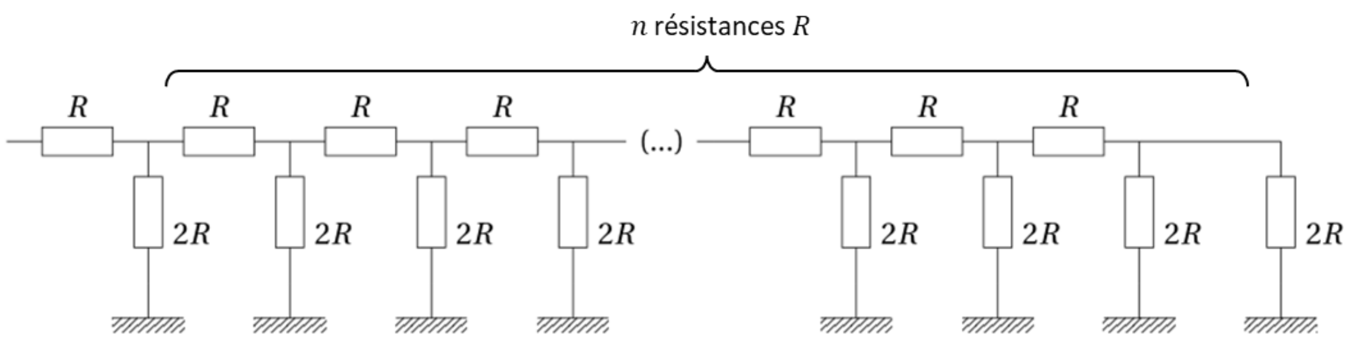
Par symétrie, chaque résistance $2R$ est parcourue par le même courant i. La résistance R est donc parcourue par un courant $2i$. La loi des mailles donne :

$$V_{ref}=R\times 2i+2R\times i=4Ri\quad\Rightarrow\quad\boxed{i=\frac{V_{ref}}{4R}}$$

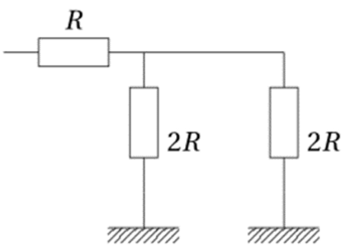
23) Montrons par récurrence que la résistance équivalente du circuit possédant n résistances R sur la branche du dessus vaut $2R$.

Initialisation : cas où $n=1$. On sait que $R_{eq}=2R$ d'après la question 21.

Transitivité : on suppose le cas $n>1$ vrai et montrons que le cas $n+1$ est toujours vrai.



Par hypothèse, ce montage est équivalent à au montage ci-dessous :

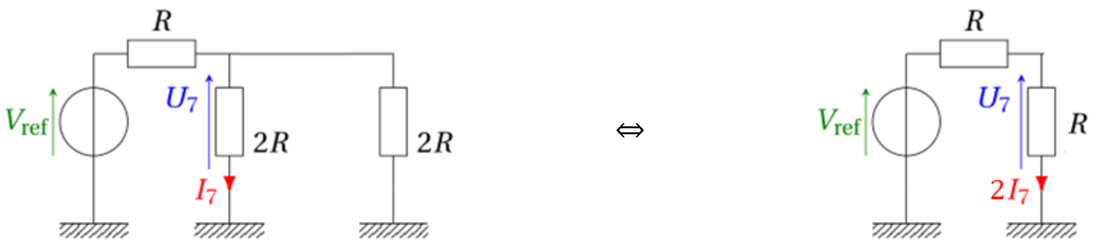


Ce dernier, d'après la question 21, est bien équivalent à une résistance $2R$.

Conclusion : le montage est, quel que soit sa taille, équivalent à une résistance $2R$.

IV.2 - Étude du circuit de base du convertisseur

24) D'après ce qui précède, le montage est équivalent à :



D'après ce qui précède :

$$\boxed{U_7 = \frac{V_{ref}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{i = \frac{V_{ref}}{4R}}$$

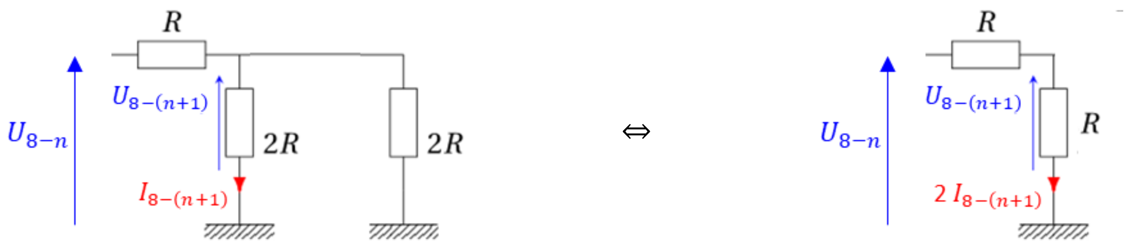
25) Montrons par récurrence que, pour $n \in [\![0\,,8]\!]$:

$$\boxed{U_{8-n} = \frac{V_{ref}}{2^n}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_{8-n} = \frac{V_{ref}}{2^n \times 2R}}$$

Initialisation : cas où $n = 1$ qui vient d'être fait.

Transitivité :

Le montage est équivalent à :



Avec le même raisonnement qu'à la question 20 :

$$U_{8-(n+1)} = \frac{U_{8-n}}{2} = \frac{V_{ref}}{2^n \times 2} = \boxed{\frac{V_{ref}}{2^{n+1}}} \quad \text{et} \quad i_{8-(n+1)} = \frac{U_{8-n}}{4R} = \frac{V_{ref}}{2^n \times 4R} = \boxed{\frac{V_{ref}}{2^{n+1} \times 2R}}$$

CQFD

Il suffit maintenant d'effectuer un changement d'indice pour répondre à la question posée. Posons : $k = 8 - n \Rightarrow n = 8 - k$. On obtient :

$$\boxed{U_k = \frac{V_{ref}}{2^{8-k}}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_k = \frac{V_{ref}}{2^{8-k} \times 2R}}$$