

Ce sujet est constitué de **4 parties indépendantes**, que les candidats pourront traiter dans l'ordre de leur choix. En revanche, ils devront rendre une copie où **les questions sont traitées dans l'ordre**.

**La calculatrice est autorisée**

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**I - Tomber plus vite que la chute libre**

**I.1 - Préambule**

Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme et vaut  $\vec{g} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1) Montrer qu'en l'absence de tout frottement aérodynamique, deux objets de masses différentes placés dans le champ de pesanteur terrestre possèdent la même accélération.

Puisque deux objets de masses différentes possèdent la même accélération : ils tombent en chute libre à la même vitesse. C'est pourquoi il est assez surprenant de voir certaines situations où une partie d'un objet tombe plus lentement ou plus vite qu'en chute libre. Dans ce problème nous proposons d'étudier une de ces situations.

**Présentation de l'expérience**

On considère le dispositif ci-dessous. Une planche de bois, rigide et homogène, est fixée à l'une de ses extrémités à un support fixe par une liaison pivot parfaite (sans frottement). Elle tourne donc autour de l'axe horizontal (Oz). À l'autre extrémité, un gobelet, de masse négligeable, est solidaire de la planche. Enfin, une bille est posée à l'extrémité de la planche, à côté du gobelet.

**Figure n°1.** Initialement, la planche est immobile et inclinée par rapport au sol horizontal d'un angle  $\theta_0$ . À l'instant  $t = 0$ , on lâche la planche sans lui communiquer de vitesse initiale. On observe alors que, sous certaines conditions expérimentales précisées dans ce problème, le gobelet tombe plus vite que la bille et vient se positionner sous cette dernière : la bille se retrouve alors à l'intérieur du gobelet lorsque la planche touche le sol !

Le but de ce problème est d'expliquer ce phénomène, puis de déterminer les paramètres géométriques pertinents pour pouvoir réaliser cette expérience. Les notations utilisées sont définies sur la **figure n°2**.

Figure n°1

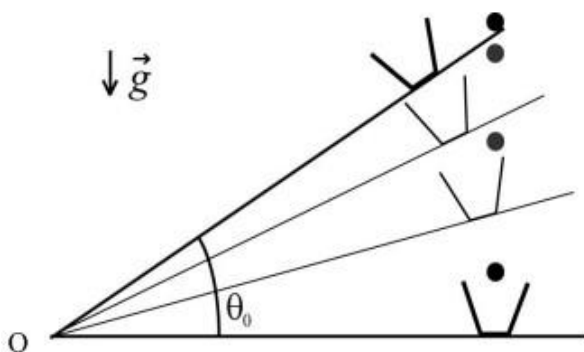
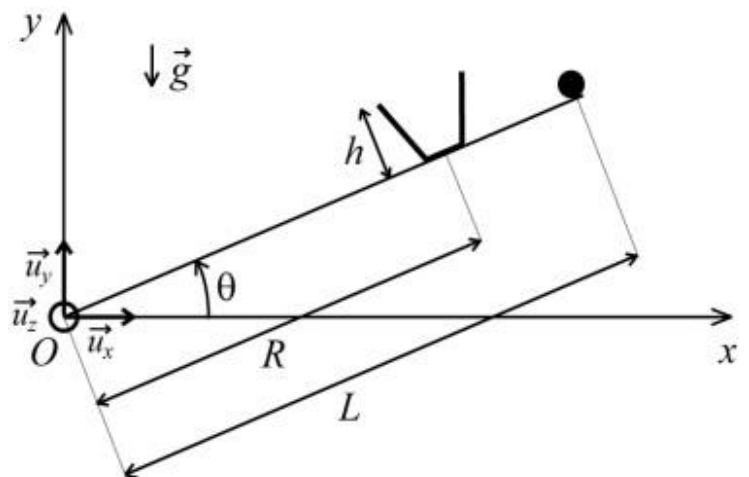


Figure n°2



Le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  lié au repère  $(O, x, y, z)$  sera supposé galiléen et on néglige les frottements de l'air.

### Notations :

- $L = 1,0 \text{ m}$  la longueur de la planche, et donc la distance entre O et la balle à l'instant initial
- $\theta_0 = 30^\circ$  l'inclinaison initiale de la planche
- $M$  la masse de la planche (celle du gobelet est négligeable)
- $m$  la masse de la bille
- $R$  la distance entre O et le centre du gobelet
- $h$  la hauteur du gobelet
- $J_{Oz} = \frac{1}{3}ML^2$  le moment d'inertie de la planche par rapport à l'axe (Oz)

## 1.2 - Étude du mouvement de la planche

2) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  est :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{3g}{2L} \cos(\theta) = 0$$

3) Établir l'expression de l'accélération de l'extrémité droite de la planche dans  $\mathcal{R}$ , notée  $\vec{a}$ , dans la base cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , en fonction de  $g, L, \theta$  et  $\dot{\theta}$ .

4) En déduire l'expression de son accélération verticale initiale, notée  $a_{y,0}$ , en fonction de  $g$  et  $\theta_0$ . Expliquer qualitativement pourquoi la bille peut tomber à l'intérieur du gobelet lorsque la planche touche le sol.

## 1.3 - Détermination des temps de chute de la bille et de la planche

L'altitude de départ de la bille est notée  $y_0$ .

5) Déterminer l'expression de  $y_0$ . Faire l'application numérique.

6) Déterminer l'expression du temps de chute  $T_{\text{bille}}$  de la bille en fonction de  $g$  et  $y_0$ . Faire l'application numérique.

On s'intéresse maintenant au temps de chute de la planche, noté  $T_{\text{planche}}$ .

7) À partir de l'équation obtenue à la question 2, montrer que la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  s'écrit :

$$\dot{\theta}(t) = -\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}$$

8) En déduire l'expression du temps de chute de la planche sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Pour  $\theta_0 = 30^\circ$  on donne :

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)}} = 1,52$$

9) En déduire la valeur numérique de  $T_{\text{planche}}$ . Conclure.

## 1.4 - Détermination des paramètres permettant de « dimensionner » l'expérience

Plusieurs facteurs peuvent empêcher la bille de retomber à l'intérieur du gobelet. C'est en particulier le cas :

- si l'angle d'inclinaison initial de la planche devient « trop grand » (condition 1)
- si le gobelet est fixé sur la planche « trop loin » de la bille (condition 2)
- si la hauteur du gobelet est « trop importante » (condition 3)

Le but ici est d'essayer de quantifier ces paramètres.

Pour simplifier le problème, on considère que les dimensions caractéristiques du gobelet (sa largeur, ainsi que sa hauteur notée  $h$ ) sont négligeables devant la longueur  $L$  de la planche, et on néglige la largeur du gobelet devant sa hauteur  $h$ .

10) Condition 1 · En vous aidant des résultats de la partie I.2, déterminer la valeur de l'angle  $\theta_0$  maximale acceptable, notée  $\theta_{0,max}$ , pour que la bille retombe à l'intérieur du gobelet lorsque la planche touche le sol. Faire l'application numérique.

Par la suite, on suppose que l'angle  $\theta_0 < \theta_{0,max}$ .

11) Condition 2 · Par un argument purement géométrique, déterminer la distance  $R$  à laquelle il faut fixer le centre du gobelet pour que la bille, qui se trouve initialement à l'extrémité droite de la planche, tombe à l'intérieur du gobelet en fonction de  $L$  et  $\theta_0$ . Faire l'application numérique.

On suppose maintenant que les conditions 1 et 2 sont vérifiées.

12) Condition 3 · On note  $h = 4,0$  cm la hauteur du gobelet. Que doit-on vérifier pour pouvoir dire que la bille retombe à l'intérieur du gobelet à coup sûr ? Est-ce le cas ?

----- Fin de la partie I -----

## II - Étude simplifiée de l'œil humain

L'œil humain a sensiblement la forme d'une sphère limitée par une membrane (la sclérotique) qui est transparente à l'avant de l'œil et forme la cornée (figure 1). L'intérieur du globe oculaire est divisé en deux parties séparées par le cristallin qui est une lentille convergente. Cette lentille est élastique et ses rayons de courbure varient lorsque l'œil accommode, c'est-à-dire quand il passe de la vision de loin à la vision de près. La partie antérieure entre la cornée et le cristallin est remplie d'un liquide appelé humeur aqueuse. L'iris permet à l'œil de diaphragmer et définit la pupille. La partie postérieure du cristallin est formée du corps vitré. La rétine qui sert de détecteur est tapissée de cellules de deux types différents, les cônes et les bâtonnets qui transforment l'excitation lumineuse en influx nerveux. La fovéa, partie de la rétine située sur l'axe optique de l'œil, est la partie la plus sensible de la rétine.

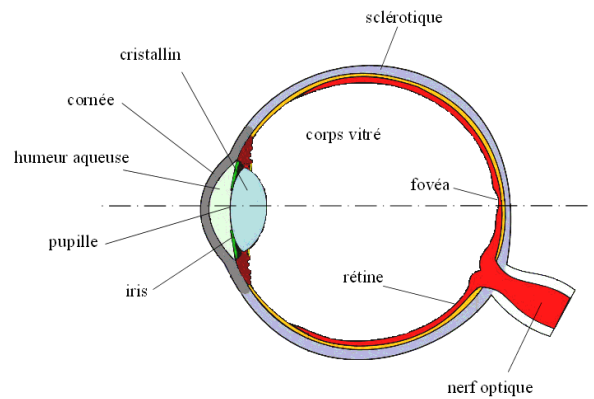


Figure 1 : coupe de l'œil humain

Pour simplifier l'étude de l'œil, on peut assimiler celui-ci à une lentille  $\mathcal{L}$  plan-convexe d'indice  $n = 1,33$  plongée dans l'air d'indice 1. La lentille  $\mathcal{L}$  possède une face d'entrée plane et une face de sortie sphérique.

On se place dans le cas de la vision de loin quand l'œil n'accommode pas. Un rayon parallèle à l'axe optique, situé à la distance  $h$  de celui-ci, est issu d'un point objet  $A_\infty$  à l'infini sur l'axe optique (figure 2). Il pénètre par la face d'entrée plane de la lentille pour arriver au point  $I$  de la face concave où il se réfracte en passant du milieu, d'indice  $n = 1,33$ , à l'air, d'indice 1. Le rayon émergent intercepte l'axe optique au point image  $A_i$ .

$C$  est le centre de courbure de la face de sortie de la lentille et  $R_C$  son rayon de courbure. On note  $i$  l'angle d'incidence et  $r$  l'angle réfracté par rapport à la normale  $CI$ . Dans un premier temps, les rayons ne seront pas considérés paraxiaux (ie. pas proches de l'axe optique).

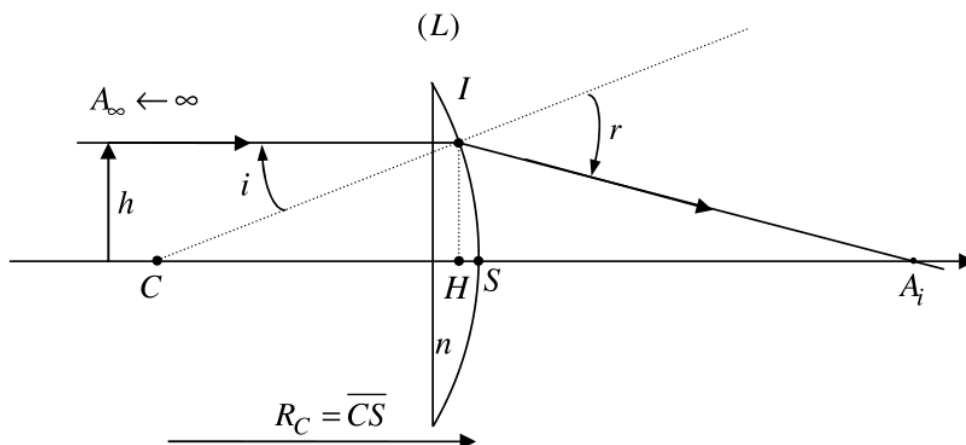


Figure 2 : modèle simplifié de l'œil pour la vision de loin

- 13) Expliquer pourquoi, lors de la traversée de la face plane, le rayon lumineux n'est pas dévié.
- 14) Exprimer la relation entre les angles  $i$  et  $r$  à l'aide de la loi de Snell-Descartes.
- 15) Soit  $H$ , le projeté de  $I$  sur l'axe optique. Exprimer les distances algébriques  $\overline{CH}$  et  $\overline{HA_i}$  en fonction de  $i$ ,  $r$  et  $R_C$ . En déduire l'expression de  $\overline{CA_i}$ .
- L'œil regarde un objet en plein soleil de sorte que sa pupille est fermée. Dans ce cas, les conditions de Gauss s'appliquent et peut donc considérer les rayons lumineux comme étant paraxiaux.
- 16) Montrer, dans ces conditions, que la position du point  $A_i$  ne dépend pas de  $i$  et donc de  $h$ .
- 17) Dans ces conditions,  $H$  est confondu avec  $S$  (voir figure 2) et  $A_i$  est le foyer image  $F'_i$  de la lentille. On appelle  $f'_i = \overline{SF'_i}$  sa distance focale image. Déterminer  $f'_i$  en fonction de  $n$  et  $R_C$ .
- 18) La vergence de l'œil normal, quand il n'accommode pas, est  $V = 60 \delta$ . Calculer  $f'_i$  et  $R_C$ .
- L'œil regarde toujours un objet à l'infini, mais cette fois-ci, à la nuit tombante, de sorte que sa pupille est grande ouverte. Les rayons lumineux ne peuvent plus être considérés paraxiaux.
- 19) Montrer que  $\overline{CA_i}$  s'exprime en fonction de  $i$ ,  $R_C$  et  $n$  par la relation :

$$\overline{CA_i} = \frac{nR_C}{n \cos(i) - \sqrt{1 - n^2 \sin^2(i)}}$$

On cherche à exprimer la position du point  $A_i$  en fonction de la hauteur  $h$  du rayon par rapport à l'axe optique. On considère pour cela que  $h \ll R_C$  de sorte que l'on peut faire les développements limités de  $\cos(i)$  et  $\sin(i)$  au second ordre.

- 20) Donner alors l'expression de  $\overline{CA_i}$  en fonction de  $n$ ,  $R_C$  et  $h$ , à l'ordre 2 en  $h/R_C$ .
- 21) En déduire en fonction de  $n$ ,  $R_C$  et  $h$  l'étalement relatif  $\eta$  du point de focalisation d'un rayon issu de l'infini :

$$\eta = \left| \frac{\overline{CA_i}(h) - \overline{CA_i}(h \rightarrow 0)}{\overline{CA_i}(h \rightarrow 0)} \right|$$

- 22) Pour l'œil, on peut considérer que le diamètre maximal d'ouverture de la pupille est de l'ordre de grandeur du rayon de courbure  $R_C$ . Calculer  $\eta$ .
- 23) Expliquer pourquoi la vision de loin est moins nette quand l'éclairement est faible et pourquoi on a le réflexe de plisser les yeux pour voir plus net au loin.

----- Fin de la partie II -----

### III - Oscillateur à quartz

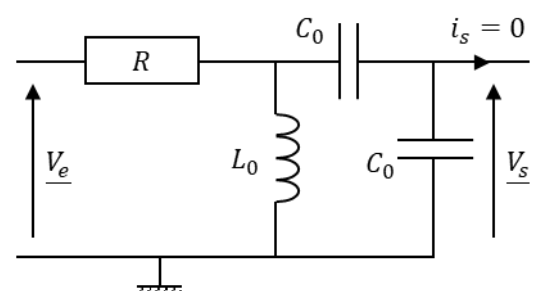
Ce problème étudie le principe et la réalisation des oscillateurs dits « à quartz », omniprésents, par exemple dans les montres. On étudie d'abord le principe général d'un oscillateur électronique, puis le modèle du cristal piézoélectrique, qu'on désignera par la suite comme un « quartz », et enfin un oscillateur utilisant le quartz.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. Dans tout le problème, on ne s'intéressera, sauf mention explicite du contraire, qu'au régime sinusoïdal permanent dont la pulsation sera notée  $\omega$ .

#### III.1 - Oscillateur électronique de Colpitts

On considère le filtre ci-contre, utilisé en sortie ouverte, dans lequel les condensateurs, la bobine et le résistor sont idéaux. On désigne par  $\underline{V}_e$  (resp.  $\underline{V}_s$ ) le potentiel d'entrée (resp. de sortie) repéré par rapport à la masse.

- 24) Déterminer le schéma équivalent du circuit pour  $\omega \rightarrow \infty$  et  $\omega \rightarrow 0$  (on ne remplacera pas dans ce dernier cas les condensateurs par leur modèle asymptotique) et en déduire la nature du filtre.



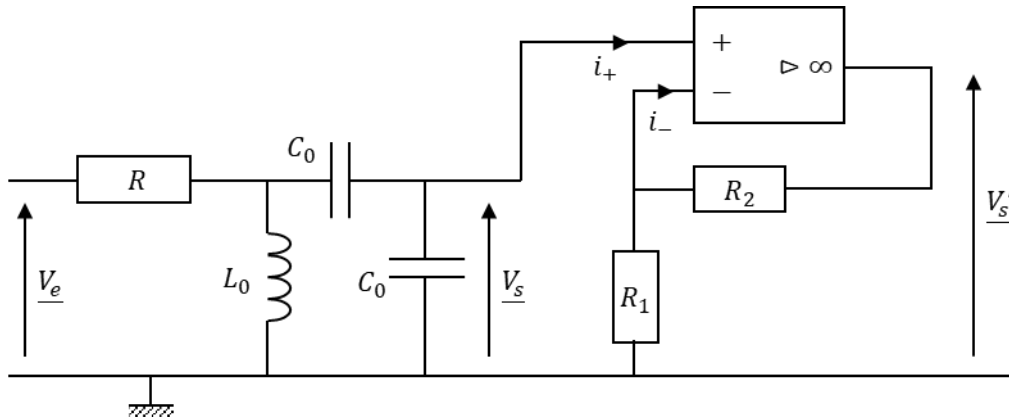
25) Montrer que la fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$\underline{H}_0 = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1/2}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{L_0 C_0}}$  et  $Q = \frac{R}{L_0 \omega_0}$ . Retrouver alors la nature du filtre.

26) Tracer soigneusement, sur la même feuille, le diagramme de Bode pour  $Q = 0,5$  et  $Q = 2$ . Indiquer graphiquement pour ces deux cas la bande passante à  $-3$  dB.

On branche (cf. ci-dessous) la sortie du filtre précédent sur la borne « + » d'un composant électronique actif, nommé amplificateur opérationnel (AO). Aucune connaissance sur les AO n'est nécessaire pour répondre aux questions.

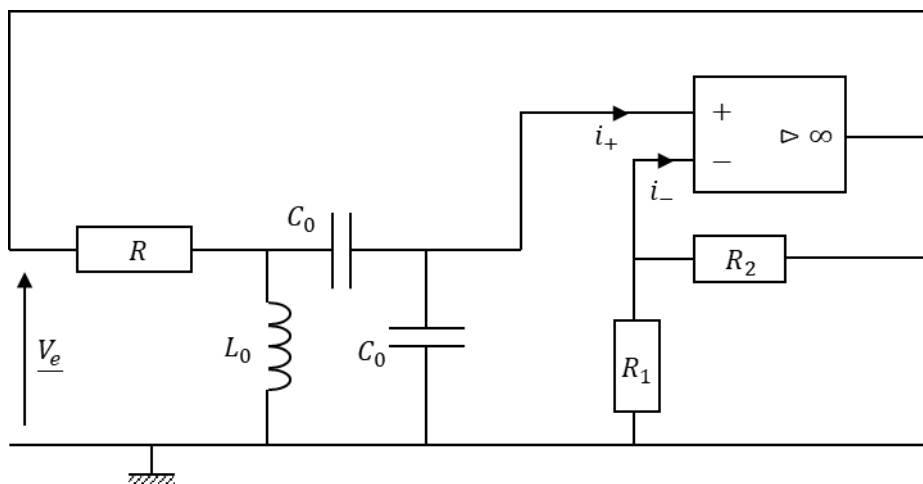


On admet que :

- Les intensités des courants aux bornes notées « + » et « - » sont nulles :  $i_+ = i_- = 0$ .
- Le montage réalise la fonction de transfert suivante :  $\underline{H}_1 = \frac{V'_s}{V_s} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

27) Pourquoi est-il nécessaire que  $i_+ = 0$  ? En déduire l'expression la fonction de transfert totale  $\underline{H} = \frac{V'_s}{V_e}$ .

On relie maintenant l'entrée et la sortie du filtre global selon le schéma ci-dessous.

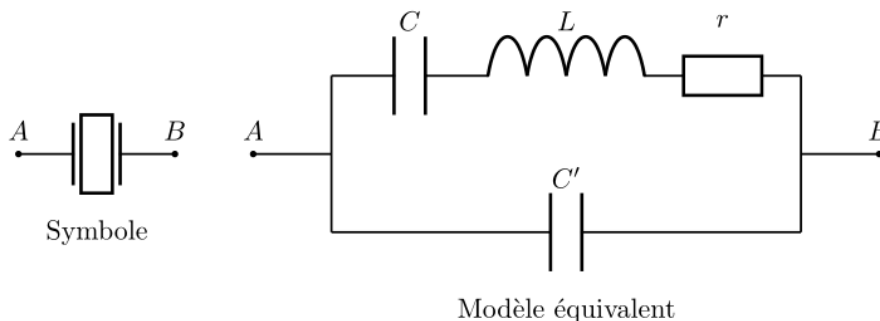


28) À l'aide de l'expression précédente de  $\underline{H}$ , établir l'équation différentielle vérifiée par la tension réelle  $V_e$ .

29) En déduire que sous certaines conditions qu'on explicitera portant sur les paramètres  $R_1$  et  $R_2$ , le système se comporte comme un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ .

### III.2 - Modèle électrocinétique du quartz

Un quartz peut être modélisé par le schéma électrocinétique ci-contre, dans lequel les condensateurs de capacité  $C$  et  $C'$ , la bobine d'inductance  $L$  et le résistor seront considérés idéaux. La résistance  $r$  sera considérée nulle, sauf à la question 33.



- 30) Exprimer l'impédance complexe  $\underline{Z}$  du quartz (on rappelle que  $r = 0$ ).
- 31) Déterminer la pulsation finie non nulle  $\omega_s$  pour laquelle  $\underline{Z}(\omega_s) = 0$  et la pulsation finie non nulle  $\omega_p$  pour laquelle  $|\underline{Z}(\omega_p)| \rightarrow \infty$ . Les exprimer en fonction de  $C$ ,  $C'$  et  $L$  et vérifier que  $\omega_s < \omega_p$ .
- 32) Tracer l'allure du graphe du module de l'impédance en fonction de  $\omega$  :  $|\underline{Z}|(\omega)$ .
- 33) Comment serait qualitativement modifié ce graphe si  $r$  n'est plus nulle mais de faible valeur.
- 34) Dans quels domaines de pulsations  $\omega$  le quartz a-t-il un comportement purement capacitif (de capacité  $C_{eq}$ ) ? purement inductif (d'inductance  $L_{eq}$ ) ?

Dans la suite, on peut admettre que :

$$C_{eq} = (C + C') \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2} \quad \text{et} \quad L_{eq} = \frac{L}{1 + \frac{C'}{C}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$$

### III.3 - Oscillateur de Pierce

On reprend le dernier circuit de la partie III.1 (on suppose que la condition de la question 29 est remplie) où l'on remplace la bobine par le quartz du III.2 (en se plaçant dans l'intervalle de pulsation où le quartz a un comportement purement inductif, déterminé à la question 34). On obtient alors un oscillateur de Pierce.

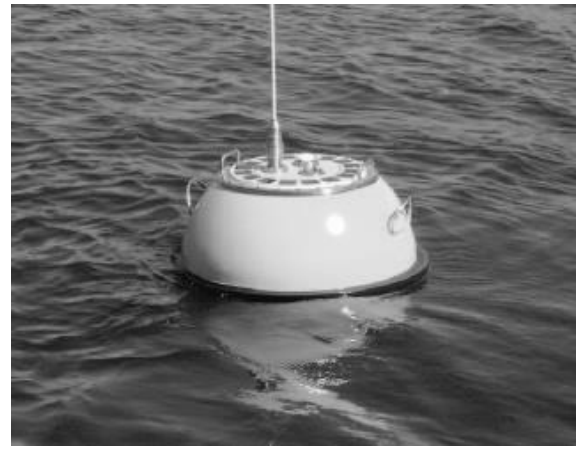
- 35) Établir l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit en fonction de  $\omega_s$ ,  $\omega_p$  et  $K = 2 \frac{C+C'}{C_0}$ .
- 36) On imagine une variation de température de  $10^\circ\text{C}$  environ. Avec un montage à bobine (III.1) les variations relatives des valeurs de la capacité et de l'inductance sont de l'ordre de 3,5 %. Avec un oscillateur de Pierce (donc à base de quartz), la variation relative du carré de la pulsation propre (de  $\omega_0^2$ ) est de l'ordre de 0,0008 %. Commenter.

----- Fin de la partie III -----

## IV - Prévention de la corrosion

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle.

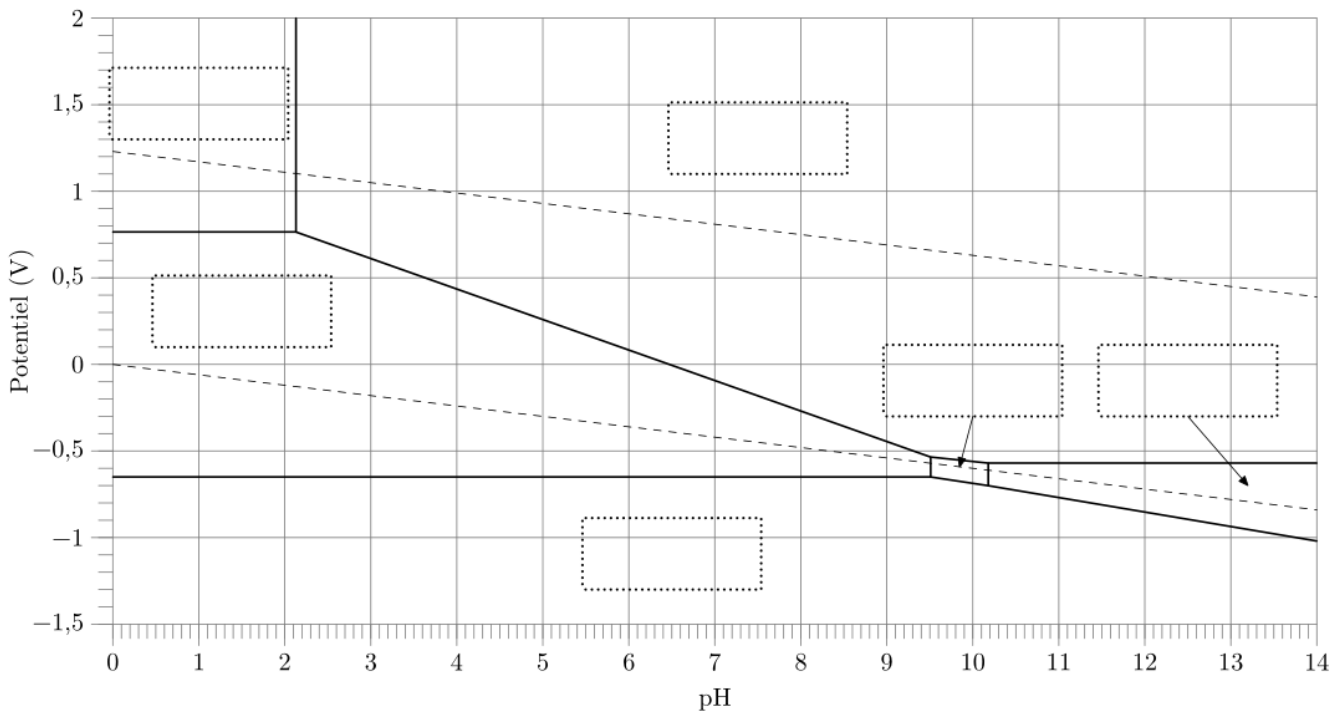
La coque des bouées Waverider est faite d'acier AISI 316, un alliage de fer, de carbone (moins de 1%) et de chrome. L'oxydation du chrome permet la formation d'une couche superficielle passivante et rend l'acier « inoxydable », donc apte à demeurer longtemps en milieu marin. Cependant, la présence d'ions chlorures entraîne une dégradation locale de la couche de passivation, déclenchant irrémédiablement la corrosion du fer.



## IV.1 - Thermodynamique de la corrosion du fer

La figure ci-dessous est un diagramme potentiel-pH du fer tracé pour la concentration totale en espèces dissoutes  $C_{tr} = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Les espèces prises en compte sont  $\text{Fe}_{(s)}$ ,  $\text{FeOOH}_{(s)}$ ,  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$ ,  $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$ ,  $\text{Fe}_{(aq)}^{3+}$  et  $\text{HFeO}_2^-$ .

Les frontières associées aux couples d'oxydoréduction de l'eau ont été superposées en pointillés gris.



37) Recopier schématiquement ce diagramme potentiel-pH et le compléter en attribuant à chaque domaine une espèce contenant Fe.

38) À partir du diagramme, déterminer le potentiel standard du couple  $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}/\text{Fe}_{(s)}$  et  $\text{pK}_s$  de  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$ .

39) Sans utiliser le diagramme, déterminer la pente de la frontière séparant  $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$  et  $\text{FeOOH}_{(s)}$ .

40) À partir du diagramme, écrire la réaction se produisant quand une pièce de fer est laissée à l'abandon dans une solution aqueuse saturée en dioxygène  $\text{O}_{2(aq)}$  et dont le pH vaut 7.

## IV.2 - Cinétique de la corrosion de l'acier

Nous allons analyser la corrosion de l'acier (alliage contenant > 99 % fer et < 1 % carbone, sans chrome) dans une solution aqueuse de chlorure de sodium modélisant l'eau de mer.

## Description de l'expérience

Soit un bécher contenant une solution aqueuse de chlorure de sodium de concentration  $C_{sel}$ , saturée en dioxygène  $O_{2(aq)}$  et de pH égal à 8,2. Le pH est maintenu fixe durant toute l'expérience grâce à un dispositif non présenté. On suppose également que, la solution étant à l'air libre, la concentration en dioxygène  $C_{O_2} = [O_{2(aq)}]$  reste fixe durant toute l'expérience.

Une électrode au calomel saturé de potentiel  $E_{ref} = 0,25 \text{ V}$  est immergée dans le bécher et reliée via un voltmètre à une électrode d'acier (pas encore immergée). À  $t = 0$ , on immerge l'électrode d'acier dans le bécher, et on relève la différence de potentiel  $U = E_{acier} - E_{ref}$  lue sur le voltmètre en fonction du temps.

La réaction qui a lieu est celle de la question précédente.

41) Écrire la relation entre  $U(t)$  et  $[Fe^{2+}](t)$ .

42) Exprimer la vitesse volumique de réaction, notée  $v$ , en fonction de  $[Fe^{2+}]$ .

On donne ci-dessous la concentration en  $Fe_{(aq)}^{2+}$  déterminé expérimentalement en fonction du temps.

$t$ (s)	0	10	30	60	120	300
$[Fe^{2+}]$ (mmol · L <sup>-1</sup> )	0	0,19	0,59	1,15	2,33	5,78

43) Déterminer l'ordre de la réaction en détaillant bien votre raisonnement. Commenter la valeur obtenue. Déterminer la constante de vitesse notée  $k$ .

44) Lorsque l'acier est plongé dans l'eau, il est donc nécessaire de le protéger contre la corrosion. Cela se fait en ajoutant dans l'alliage des atomes de chrome. Ce nouvel alliage est appelé « acier inoxydable ». Commenter le nom choisi.

45) Lorsque l'on augmente la concentration en sel  $C_{sel}$ , la constante de vitesse augmente. Comment appelle-t-on un tel paramètre ?

----- Fin de la partie IV -----



## I - Tomber plus vite que la chute libre

### I.1 - Préambule

1) La seule force subie par un objet de masse  $m$  est son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Le PFD appliqué à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

L'accélération ne dépend donc pas de la masse de l'objet.

### I.2 - Étude du mouvement de la planche

2) Système {planche + gobelet} de masse  $M$ . On applique le TMC par rapport à l'axe (Oz) dans  $\mathcal{R}$  galiléen.

Forces et moments :

- Le poids qui s'applique au centre de masse  $G$  de la planche.

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge M\vec{g}) \cdot \vec{u}_z = -\frac{MgL}{2} \cos(\theta)$$

- La liaison pivot parfaite qui s'applique en  $O$  et donc de moment nul.

TMC :

$$J_{Oz}\ddot{\theta} = -\frac{MgL}{2} \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{3g}{2L} \cos(\theta) = 0}$$

3) Dans la base cylindrique :

$$\vec{OM} = L \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = L\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = L\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = \boxed{-\frac{3g}{2} \cos(\theta) \vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2 \vec{u}_r}$$

4) On a :  $\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$  et  $\vec{u}_\theta = \cos(\theta) \vec{u}_y - \sin(\theta) \vec{u}_x$ .

Ainsi :

$$a_y = -\frac{3g}{2} \cos^2(\theta) - L\dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

De plus, à  $t = 0$ ,  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ . Ainsi,

$$\boxed{a_{y,0} = -\frac{3g}{2} \cos^2(\theta_0)}$$

Si  $\frac{3g}{2} \cos^2(\theta_0) > g$  (ce qui est le cas ici :  $1,125 g > g$ ), alors l'extrémité de la planche accélère plus rapidement que la balle qui est en chute libre. La planche peut donc arriver au sol avant la balle et cette dernière tomber dans le gobelet.

### I.3 - Détermination des temps de chute de la balle et de la planche

5)  $\boxed{y_0 = L \sin(\theta_0) = 50 \text{ cm}}$ .

6) On intègre deux fois un PFD :  $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$ . On en déduit :  $\boxed{T_{\text{bille}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 0,32 \text{ s}}$ .

7) On multiplie l'équation du 2 par  $\dot{\theta}$ , puis on intègre de l'instant initial à un instant quelconque.

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= -\frac{3g}{2L} \cos(\theta) \\
\times \dot{\theta} &\Rightarrow \dot{\theta} \ddot{\theta} = -\frac{3g}{2L} \dot{\theta} \cos(\theta) \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) = -\frac{3g}{2L} \frac{d}{dt} (\sin(\theta)) \\
\int &\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0=0}^{\dot{\theta}} d \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) = -\frac{3g}{2L} \int_{\theta_0}^{\theta} d(\sin(\theta)) \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{2L} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \\
&\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(t) = -\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}}
\end{aligned}$$

On choisit le signe « - » car  $\theta$  décroissant donc  $\dot{\theta} < 0$ .

8) Cf ci-dessous.

9) On intègre de l'instant initial à l'instant final. On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= -\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))} \Rightarrow dt = -\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}} \\
&\Rightarrow \int_0^{T_{\text{planche}}} dt = \int_{\theta_0}^0 -\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}} \\
&\Rightarrow \int_0^{T_{\text{planche}}} dt = \sqrt{\frac{L}{3g}} \cdot \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}} \\
&\Rightarrow \boxed{T_{\text{planche}} = 1,52 \times \sqrt{\frac{L}{3g}} = 0,28 \text{ s}}
\end{aligned}$$

On trouve  $T_{\text{planche}} < T_{\text{bille}}$ . La planche tombe bien plus vite que la bille.

#### I.4 - Détermination des paramètres permettant de « dimensionner » l'expérience

10) D'après la question 4, il faut que :

$$\frac{3g}{2} \cos^2(\theta_0) > g \Rightarrow \cos(\theta_0) > \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{\theta_0 < \theta_{0,\text{max}} = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 35^\circ}$$

11) On a :  $x_{\text{bille}} = cte = L \cos(\theta_0)$ . Il faut donc que  $\boxed{R = L \cos(\theta_0) = 87 \text{ cm}}$ .

12) Il faut que l'altitude de la bille au moment où la planche touche le sol soit supérieure que la hauteur du gobelet. Ainsi :

$$y_{\text{bille}}(t = T_{\text{planche}}) > h \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} g T_{\text{planche}}^2 + y_0 > h}$$

Ici,  $h = 4,0 \text{ cm}$  et  $-\frac{1}{2} g T_{\text{planche}}^2 + y_0 = 12 \text{ cm}$ . La condition est bien vérifiée.

----- Fin de la partie I -----

## II - Étude simplifiée de l'œil humain

13) L'angle d'incidence vaut  $0^\circ$ . D'après la loi de Snell-Descartes, l'angle de réfraction vaut également  $0^\circ$ . Le rayon n'est donc pas dévié.

14) Snell-Descartes :  $n \sin(i) = \sin(r)$

15) On a :

$$\overline{CH} = CI \cdot \cos(i) = R_C \cos(i) \quad \text{et} \quad \overline{HA}_i = \frac{HI}{\tan(r-i)} = \frac{R_C \sin(i)}{\tan(r-i)}$$

On en déduit :

$$\overline{CA}_i = \overline{CH} + \overline{HA}_i = R_C \left[ \cos(i) + \frac{\sin(i)}{\tan(r-i)} \right]$$

16) Avec des rayons paraxiaux,  $\cos(\theta) \simeq 1$  et  $\sin(\theta) \simeq \tan(\theta) \simeq \theta$ . En particulier, la loi de Snell-Descartes devient :  $n i = r$ . Ainsi,

$$\overline{CA}_i \simeq R_C \left[ 1 + \frac{i}{r-i} \right] = R_C \left[ 1 + \frac{1}{n-1} \right] = \frac{n}{n-1} \cdot R_C$$

Cette grandeur est bien constante, elle ne dépend que des propriétés de la lentille.

17) On a :

$$f'_i = \overline{SF}_i \simeq \overline{HA}_i \simeq \frac{i}{r-i} \cdot R_C = \frac{R_C}{n-1}$$

18) On a :

$$f'_i = \frac{1}{V} = 17 \text{ mm} \quad \text{et} \quad R_C = (n-1) \cdot f'_i = 5,5 \text{ mm}$$

19) On a :

$$\begin{aligned} \overline{CA}_i &= R_C \left[ \cos(i) + \frac{\sin(i)}{\tan(r-i)} \right] \\ &= R_C \cdot \frac{\cos(i) \sin(r-i) + \sin(i) \cos(r-i)}{\sin(r-i)} \\ &= R_C \cdot \frac{\cos(i) [\sin(r) \cos(i) - \cos(r) \sin(i)] - \sin(i) [\cos(r) \cos(i) - \sin(r) \sin(i)]}{\sin(r) \cos(i) - \cos(r) \sin(i)} \\ &= R_C \cdot \frac{\sin(r)}{\sin(r) \cos(i) - \sqrt{1 - \sin^2(r)} \cdot \sin(i)} \\ &= \frac{R_C}{\cos(i) - \sqrt{\frac{\sin^2(i)}{\sin^2(r)} - \sin^2(i)}} \\ &= \frac{n R_C}{n \cos(i) - \sqrt{1 - n^2 \sin^2(i)}} \end{aligned}$$

20) Avec un DL à l'ordre 2 :  $\sin(i) \simeq i = \frac{h}{R_C}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \overline{CA}_i &\simeq \frac{n R_C}{n \left( 1 - \frac{(h/R_C)^2}{2} \right) - \sqrt{1 - n^2 (h/R_C)^2}} \simeq \frac{n R_C}{n \left( 1 - \frac{(h/R_C)^2}{2} \right) - \left( 1 - \frac{n^2 (h/R_C)^2}{2} \right)} \\ &\simeq \frac{n R_C}{(n-1) \left( 1 + \frac{n}{2} \left( \frac{h}{R_C} \right)^2 \right)} \simeq \frac{n R_C}{(n-1) \left( 1 - \frac{n}{2} \left( \frac{h}{R_C} \right)^2 \right)} \end{aligned}$$

21) On a donc :

$$\eta = \left| \left( 1 - \frac{n}{2} \left( \frac{h}{R_c} \right)^2 \right) - 1 \right| = \boxed{\frac{n}{2} \left( \frac{h}{R_c} \right)^2}$$

22) Enchainement étrange de questions... car si  $h \sim R_c/2$ , alors l'approximation des questions précédente n'est pas valable !

On a :

$$\sin(i) = \frac{h}{R_c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(i) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{CA}_1 = \frac{nR_c}{n \cos(i) - \sqrt{1 - n^2 \sin^2(i)}} = \frac{nR_c}{\alpha} \quad \text{avec : } \alpha = 0,40$$

Donc,

$$\eta = \left| \frac{n-1}{\alpha} - 1 \right| = 0,18$$

Remarque : les rayons marginaux convergent à  $0,18 \cdot n \cdot f'_i = 4,1$  mm avant la rétine.

23) La pupille est grande ouverte quand l'éclairement est faible. Les rayons issus d'un objet lointain ne convergent pas au même foyer. La lentille n'est plus stigmatique : La vision de loin est affectée d'aberrations géométriques donc moins nette.

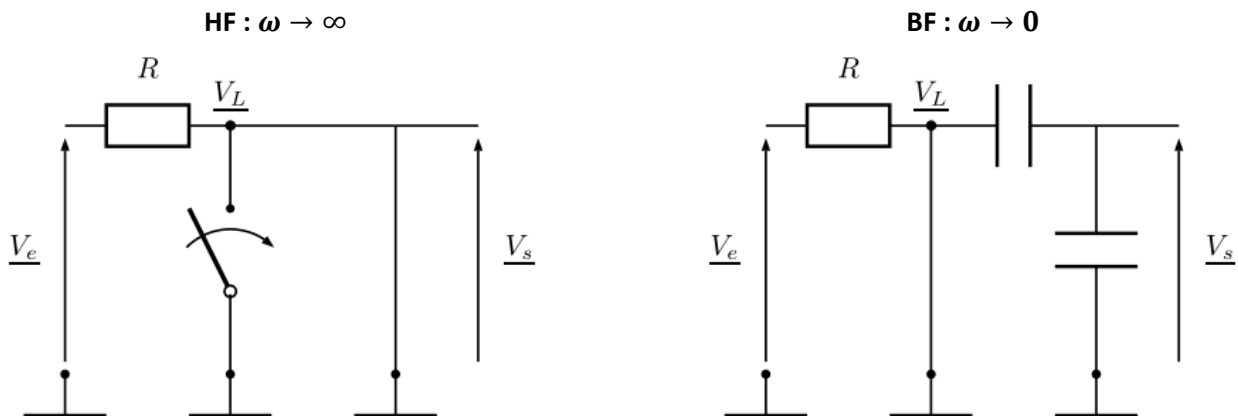
Pour voir plus net au loin, il faut éliminer au mieux les rayons marginaux, par fermeture de la pupille. C'est pourquoi on a le reflex de plisser les yeux.

----- Fin de la partie II -----

### III - Oscillateur à quartz

#### III.1 - Oscillateur électronique de Colpitts

24)



Tension aux bornes d'un fil :  $\underline{V}_s = 0$

On laisse les condensateurs pour éviter des confusions. Un pont diviseur donne :  $\underline{V}_s = \underline{V}_L/2$ . Or,  $\underline{V}_L = 0$ , donc  $\underline{V}_s = 0$ .

On obtient donc un filtre **passé-bande**.

25) On applique deux ponts diviseurs successifs.

$$\underline{V}_s = \frac{\underline{V}_L}{2} \quad \text{et} \quad \underline{V}_L = \frac{1}{1 + R/\underline{Z}_{eq}} \cdot \underline{V}_e \quad \text{avec :} \quad \underline{Z}_{eq} = \left( \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{2\underline{Z}_C} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{j\omega L_0} + \frac{j\omega C_0}{2} \right)^{-1}$$

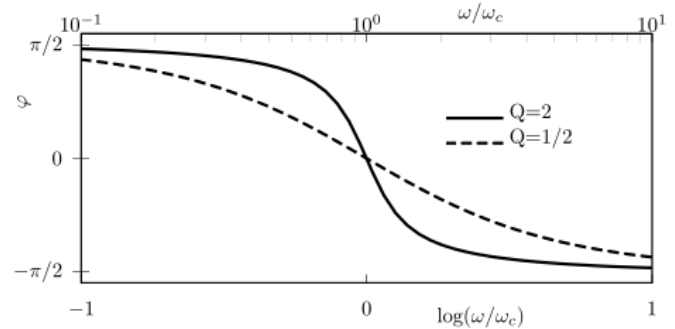
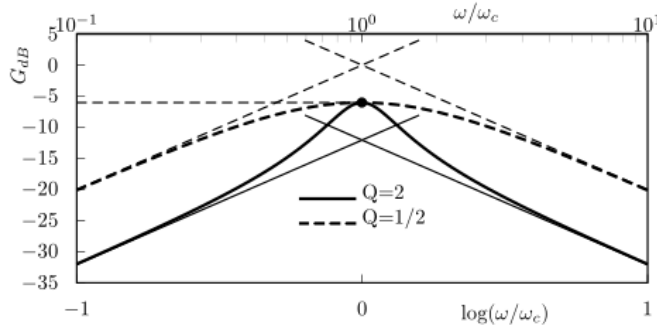
Ainsi,

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1/2}{1 + \frac{R}{j\omega L_0} + \frac{j\omega RC_0}{2}} \cdot V_e = \frac{1/2}{1 + j \cdot R \cdot \sqrt{\frac{C_0}{2L_0}} \left( \frac{\omega}{\sqrt{2/L_0 C_0}} - \frac{\sqrt{2/L_0 C_0}}{\omega} \right)} \cdot V_e = \frac{1/2}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \cdot V_e$$

On retrouve bien l'expression demandée. On constate que  $\underline{V_s} \rightarrow 0$  en BF et HF. C'est bien un passe-bande.

26) On a :

	$\underline{H_0}$	$G_{dB}$	$\arg(\underline{H_0})$
BF	$\frac{j\omega}{2Q\omega_0} = \frac{jx}{2Q}$	$20 \log(x) - 20 \log(2Q)$	$\frac{\pi}{2}$
HF	$\frac{\omega_0}{2j\omega Q} = \frac{1}{jx \cdot 2Q}$	$-20 \log(x) - 20 \log(2Q)$	$-\frac{\pi}{2}$



27) Puisque  $i_+$ , le filtre de Collpits est en sortie ouverte comme dans l'étude précédente, on peut utiliser sa fonction de transfert pour écrire :

$$\underline{H} = \frac{V'_s}{V_e} = \frac{V_s}{V_e} \cdot \frac{V'_s}{V_s} = \underline{H_0} \cdot \underline{H_1} = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left( \frac{1/2}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \right)$$

28) Le nouveau branchement assure que  $\underline{V'_s} = \underline{V_e}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{V_e}{V_e} &= \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left( \frac{1/2}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \right) \\ \Rightarrow \left( 1 + Q \left( \frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega} \right) \right) V_e &= \left( \frac{1 + R_2/R_1}{2} \right) V_e \\ \times \frac{j\omega\omega_0}{Q} \Rightarrow \left( j \frac{\omega\omega_0}{Q} + (j\omega)^2 + \omega_0^2 \right) V_e &= \left( \frac{1 + R_2/R_1}{2} \right) \frac{\omega_0}{Q} \cdot j\omega V_e \\ \text{Re} \Rightarrow \frac{d^2 V_e}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dV_e}{dt} + \omega_0^2 V_e &= \left( \frac{1 + R_2/R_1}{2} \right) \frac{\omega_0}{Q} \frac{dV_e}{dt} \\ \Rightarrow \frac{d^2 V_e}{dt^2} + \frac{\omega_0}{2Q} \left( 1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{dV_e}{dt} + \omega_0^2 V_e &= 0 \end{aligned}$$

29) Il faut  $R_1 = R_2$ .

### III.2 - Modèle électrocinétique du quartz

30) On a :

$$\underline{Z} = \left( j\omega C' + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \right)^{-1} = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{1 + \frac{C'}{C} - \omega^2 LC'} = \frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega(C + C') - j\omega^3 LCC'}$$

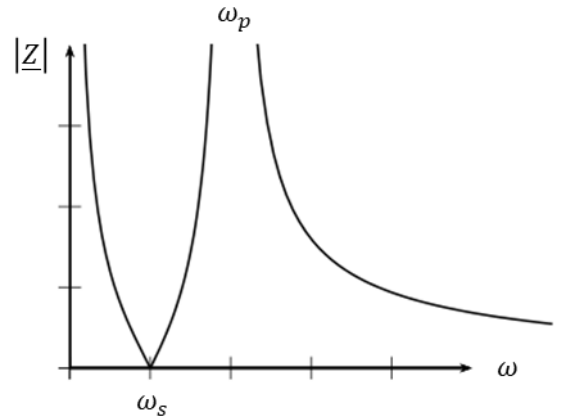
31) On a :

$$\begin{cases} \underline{Z}(\omega_s) = 0 \Leftrightarrow j\omega_s L + \frac{1}{j\omega_s C} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \\ |\underline{Z}(\omega_p)| \rightarrow \infty \Leftrightarrow 1 + \frac{C'}{C} - \omega_p^2 LC' = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC'} \left(1 + \frac{C'}{C}\right)} = \omega_s \sqrt{\left(1 + \frac{C'}{C}\right)} > \omega_s} \end{cases}$$

32) On sait que :

- $|\underline{Z}| = 0$  en  $\omega = 0$ ,  $\omega = \omega_s$  et  $\omega = +\infty$  ;
- $|\underline{Z}| = +\infty$  en  $\omega = \omega_p$  ;
- $\omega_p > \omega_s$

On en déduit l'allure du graphe (ci-contre) :



33) La résistance  $r$  ne modifie pas les valeurs en  $\omega = 0$  et  $\infty$ . En revanche,  $|\underline{Z}|(\omega_s) \neq 0$  et  $|\underline{Z}|(\omega_p) \neq +\infty$ .

34) Le quartz a une impédance durement imaginaire :

$$\underline{Z} = j \cdot \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{1 + \frac{C}{C'} - \omega^2 LC'}$$

Il a donc bien un comportement capacitif ou inductif en fonction du signe de la partie imaginaire : inductif si  $> 0$  et capacitif si  $< 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0 &\Leftrightarrow \omega > \omega_s \\ 1 + \frac{C}{C'} - \omega^2 LC' > 0 &\Leftrightarrow \omega < \omega_p \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{1 + \frac{C}{C'} - \omega^2 LC'} > 0 \Leftrightarrow \omega_s < \omega < \omega_p$$

Bilan : Comportement inductif pour  $\omega_s < \omega < \omega_p$ . Comportement capacitif si  $\omega < \omega_s$  ou  $\omega > \omega_p$

### III.3 - Oscillateur de Pierce

35) D'après Q25, en remplaçant  $L_0$  par  $L_{eq}$ , on a :

$$\begin{aligned} 2 &= L_{eq} C_0 \omega_0^2 = C_0 \cdot \frac{L}{1 + \frac{C'}{C}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_p}\right)^2} \cdot \omega_0^2 = LC \cdot \frac{C_0}{C + C'} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_p}\right)^2} \cdot \omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2 \cdot \frac{2}{K} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_p}\right)^2} \\ \Rightarrow K \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_p}\right)^2\right) &= \left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2 - 1 \\ \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \omega_s^2 \cdot \frac{1 + K}{1 + K \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^2}} \end{aligned}$$

36) Dans un oscillateur à bobine,

$$\frac{u(\omega_0^2)}{\omega_0^2} = \sqrt{\left(\frac{u(C_0)}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{u(L_0)}{L_0}\right)^2} = 4,8 \%$$

Dans un oscillateur à quartz, cette variation est d'après l'énoncé de 0,0008 %. Ce dernier est donc beaucoup moins sensible aux variations de température. !

----- Fin de la partie III -----

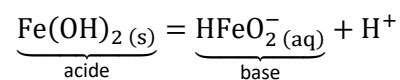
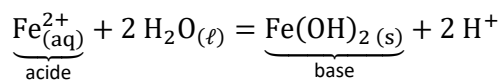
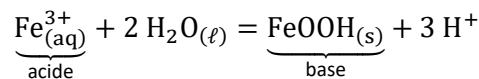
## IV - Prévention de la corrosion

### IV.1 - Thermodynamique de la corrosion du fer

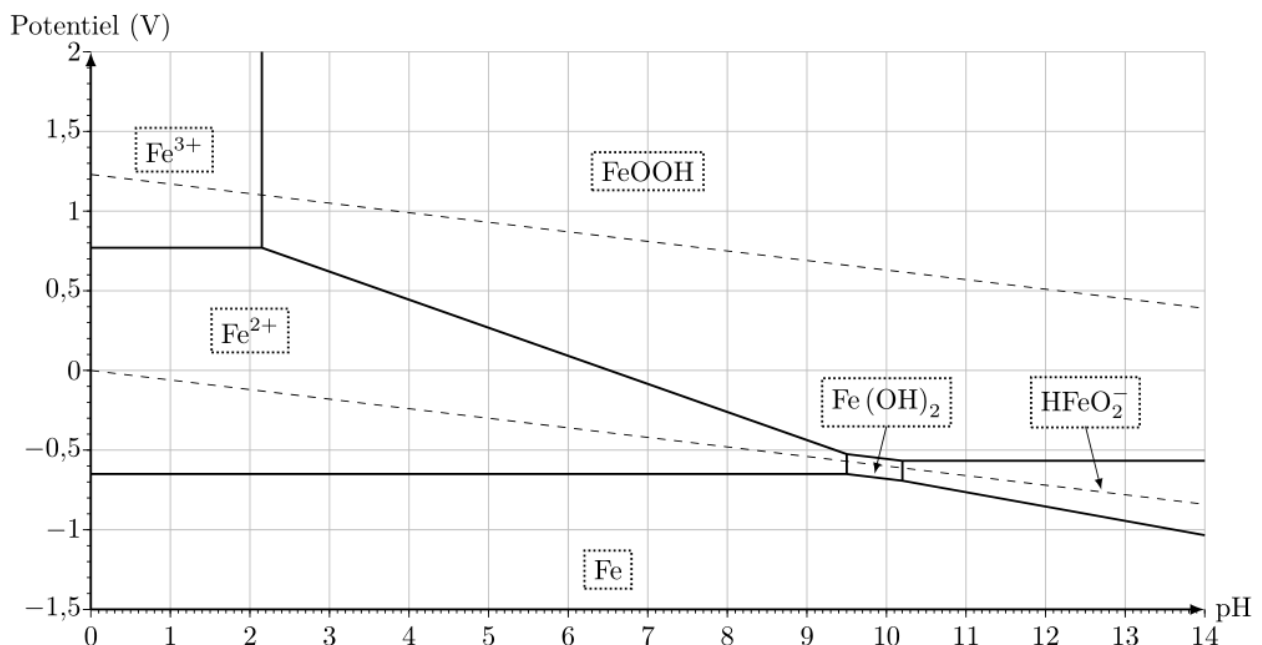
37) Déterminons premièrement des degrés d'oxydation de chaque espèce.

Espèce	Fe <sub>(s)</sub>	FeOOH <sub>(s)</sub>	Fe(OH) <sub>2</sub> (s)	Fe <sup>2+</sup> <sub>(aq)</sub>	Fe <sup>3+</sup> <sub>(aq)</sub>	HFeO <sub>2</sub> <sup>-</sup> <sub>(aq)</sub>
do(Fe)	0	+III	+II	+II	+III	+II

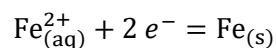
Parmi les espèces ayant le même do, on détermine les couples acido-basiques.



On en déduit :



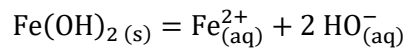
38) Demi équation du couple Fe<sup>2+</sup><sub>(aq)</sub>/Fe<sub>(s)</sub> :



Nernst à la frontière :

$$E_{fr} = -0,65 = E^\circ(\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Fe}_{(s)}) + \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{C_{tr}}{C^\circ}\right) \Rightarrow \boxed{E^\circ(\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Fe}_{(s)}) = -0,47 \text{ V}}$$

Le produit de solubilité est la constante de la réaction de dissolution :



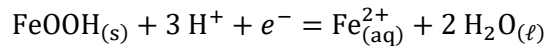
À la frontière,

$$K_s = \frac{C_{tr} \cdot [\text{HO}_{(\text{aq})}^{-}]_{fr}^2}{(C^\circ)^3} \quad \text{avec : } [\text{HO}_{(\text{aq})}^{-}]_{fr} = 10^{-14+\text{pH}_{fr}} = 10^{-4,5}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{p}K_s(\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})) = 15}$$

39) Demi équation du couple  $\text{FeOOH}_{(\text{s})}/\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$  :

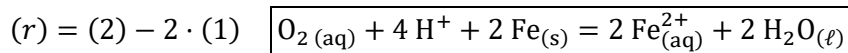
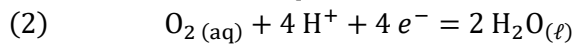
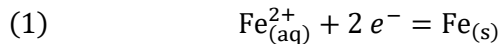


Nernst :

$$E_{fr} = cte - \frac{0,06}{1} \times 3 \text{ pH}$$

On a donc une pente de  $-0,18 \text{ V}$  par unité de pH

40) Le  $\text{Fe}_{(\text{s})}$  n'a pas de zone de commune ni avec  $\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$ , ni avec  $\text{O}_{2(\text{aq})}$ . La réaction avec la plus grande constante d'équilibre est celle entre  $\text{O}_{2(\text{aq})}$  et  $\text{Fe}_{(\text{s})}$ . On a :



## IV.2 - Cinétique de la corrosion de l'acier

41) Nernst :

$$\boxed{U(t) = E^\circ(\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Fe}_{(\text{s})}) - E_{ref} + 0,03 \log \left( \frac{[\text{Fe}^{2+}](t)}{C^\circ} \right)}$$

42) On a :

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d[\text{Fe}^{2+}]}{dt}}$$

43) À la calculatrice, on effectue la régression linéaire  $y = ax + b$ , avec  $y = [\text{Fe}^{2+}]$  et  $x = t$ . La droite de régression modélise bien le nuage de points expérimentaux, le modèle affine est donc validé.

On obtient :  $a = 0,01927$  et  $b = 0,00317$ .

On en déduit que la réaction est d'ordre 0. Ce n'est pas surprenant, la quantité d'aucun ion ne varie : les concentrations en  $\text{H}^+$  et  $\text{O}_{2(\text{aq})}$  sont fixées. Ainsi,

$$v = k_0 [\text{H}^+]^\alpha [\text{O}_{2(\text{aq})}]^\beta = k_{app} \Rightarrow \boxed{[\text{Fe}^{2+}] = 2k_{app}t}$$

L'énoncé appelle simplement  $k$  la constante apparente de cette réaction.

On en déduit la constante de vitesse :

$$\boxed{k = \frac{a}{2} = 9,64 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$$

44) L'acier s'oxyde en surface, il n'est donc pas vraiment « inoxydable », mais la couche oxydée est passivante, ce qui protège de la corrosion en profondeur.

45) Un facteur cinétique.

----- Fin de la partie IV -----