

Ce sujet est constitué de **3 parties indépendantes**, que les candidats pourront traiter dans l'ordre de leur choix.

**La calculatrice est autorisée**

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**I - Tige en rotation**

On considère une tige rectiligne uniforme en rotation autour d'une liaison pivot parfaite d'axe Oz.

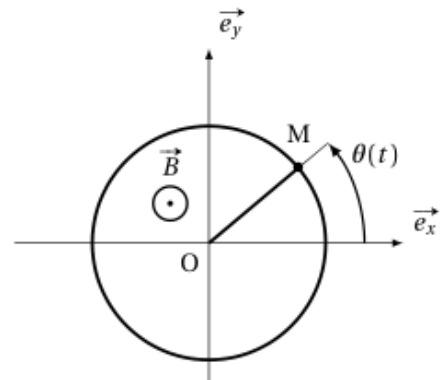
On note  $J$  le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Oz. Une extrémité coïncide avec l'origine O du repère, et l'autre extrémité glisse avec frottement fluide sur un cercle conducteur, de rayon  $a$ , fixe dans le référentiel d'étude.

La tige a une résistance électrique  $R$ . La résistance électrique du cercle est négligée devant celle de la tige.

Le point O est connecté à la masse et le cercle est maintenu à un potentiel  $U > 0$ .

L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ .

Outre les forces de Laplace, la tige subit au point M une force de frottement de la forme  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}_M$ , où  $\vec{v}_M$  est la vitesse de l'extrémité de la tige au niveau du contact sur le cercle conducteur.



1) Exprimer le moment résultant des forces de Laplace exercées sur la tige par rapport à l'axe Oz en fonction de  $U$ ,  $R$ ,  $a$  et  $B$ . Une attention particulière sera apportée à la rédaction de la réponse.

2) Exprimer le moment des forces de frottement par rapport à l'axe Oz en fonction de  $\alpha$ ,  $a$  et  $\omega = \dot{\theta}$  la vitesse angulaire de rotation.

3) Appliquer le théorème du moment cinétique à la tige pour obtenir une équation différentielle sur  $\omega(t)$ . Introduire un temps caractéristique  $\tau$  et une vitesse angulaire asymptotique  $\omega_\infty$ .

4) La tige est supposée immobile à la date  $t = 0$ . Exprimer la vitesse angulaire  $\omega(t)$  et tracer l'allure du graphe correspondant.

----- Fin de la partie I -----

**II - Étude du fil infini**

On considère un fil infini selon l'axe  $z$ , traversé par un courant  $i > 0$  selon les  $z$  croissants. On se place dans la base cylindrique. On note  $\vec{B}(r, \theta, z)$  le champ magnétique créé en un point quelconque de l'espace.

5) Par analyse des symétries et invariances du problème, justifier l'expression du champ magnétique donné ci-dessous.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Avec  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  la perméabilité magnétique du vide.

## II.1 - Inductance mutuelle entre une spire et un fil

On considère un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité  $i$  constant et une spire carrée  $M_1M_2M_3M_4$ , de résistance  $R$ .

6) Exprimer le flux magnétique  $d\phi$  traversant une surface orientée élémentaire.

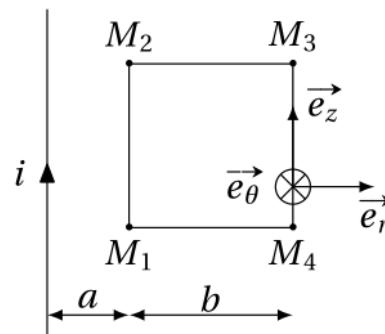
7) En déduire l'expression du flux du champ magnétique  $\phi_{fil \rightarrow spire}$  développé par le fil à travers le circuit défini par la spire en fonction de  $\mu_0$ ,  $i$ ,  $a$  et  $b$ .

8) En déduire l'expression de l'inductance mutuelle  $M$  entre le fil et la spire.

À  $t = 0$ , on éloigne radialement la spire du fil à vitesse constante  $v_0$ , sans toucher à aucun autre paramètre. Ainsi, la distance du point  $M_1$  à l'axe vaut :  $a(t) = v_0t + a_0$  où  $a_0$  est la distance initiale de  $M_1$  à l'axe.

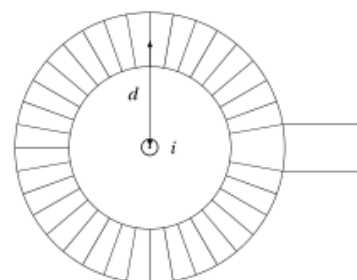
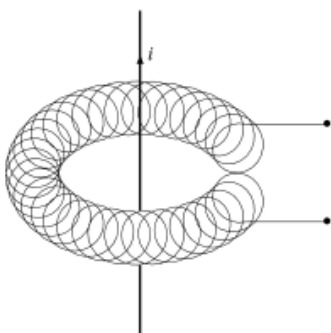
9) À l'aide d'arguments qualitatifs, expliquer pourquoi un courant, noté  $i_2$ , se développe dans la spire et déterminer son sens de circulation.

10) Déterminer l'expression de  $i_2$ . On ne cherchera pas à simplifier l'expression obtenue.



## II.2 - Pince ampèremétrique

Pour mesurer l'intensité efficace d'un courant alternatif dans une installation électrique, on peut utiliser une pince ampèremétrique dont cet exercice présente le principe de fonctionnement.



On cherche donc à mesurer l'intensité du courant alternatif qui circule dans un fil assimilé à un fil rectiligne infini, choisi selon l'axe Oz. L'intensité qui circule dans le sens des z croissant est de la forme  $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t)$ . On dispose autour du fil un circuit constitué d'un ensemble de  $N$  spires circulaires, chacune d'une aire  $S$ , qu'on modélise par un tore disposé autour du fil. Avec le système de coordonnées utilisé, le vecteur surface de chaque spire est selon  $\vec{e}_\theta$ .

11) Avec une intensité de  $I_{eff} = 1,0$  A, que vaut la valeur efficace du champ magnétique à une distance  $d = 2,0$  cm. Le champ magnétique est-il uniforme sur le disque délimité par chaque spire ?

Dans la suite, on confondra le champ magnétique moyen sur le disque délimité par chaque spire avec sa valeur au centre de cette spire, à la distance  $d$  du fil.

12) Exprimer la force électromotrice  $e$  développée aux bornes du circuit constitué par les  $N$  spires.

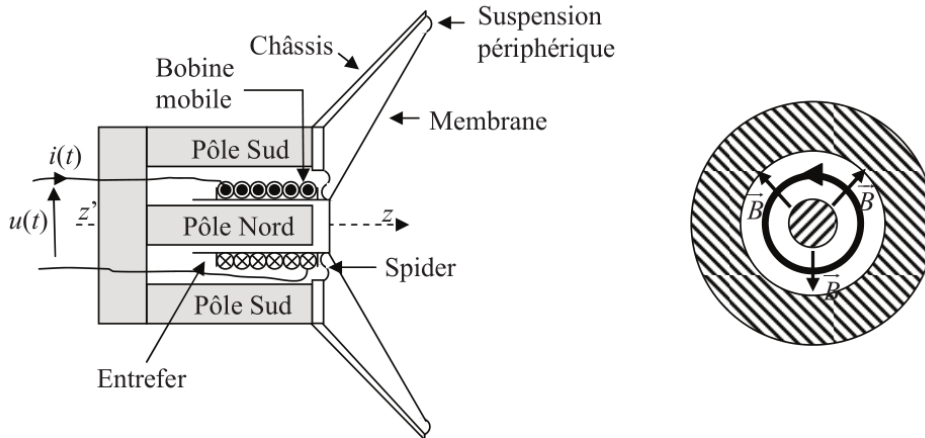
13) En déduire l'expression de la valeur efficace  $E_{eff}$  de la tension mesurée avec cette pince ampèremétrique en fonction  $\mu_0$ ,  $S$ ,  $\omega$ ,  $I_{eff}$  et  $d$ .

14) Quel doit être l'ordre de grandeur de  $N$  pour avoir une tension de l'ordre de 0,1 V pour un courant de l'ordre de 100 A ? On prendra les paramètres géométriques :  $d = 3$  cm,  $S = 1$  cm<sup>2</sup> et une fréquence  $f = 50$  Hz.

----- Fin de la partie II -----

### III - Le haut-parleur électrodynamique

Un haut-parleur électrodynamique, schématisé ci-dessous, est constitué d'un châssis sur lequel est fixé le circuit magnétique. Sur cet ensemble rigide est fixé l'élément actif du haut-parleur : l'équipage mobile formé de la membrane et de la bobine mobile. La liaison avec le châssis est assurée, près du centre par le spider, pièce de toile rigidifiée par du plastique et qui joue le rôle d'un ressort et sur le pourtour par une suspension périphérique. L'ensemble de la suspension assure le rappel vers la position d'équilibre et le guidage en translation parallèlement à l'axe ( $z'z$ ). Le circuit magnétique, constitué d'aimants permanents, génère un champ magnétique  $\vec{B}$  radial et uniforme ( $B = 1,05 \text{ T}$ ) dans l'entrefer. La longueur totale du bobinage de la bobine mobile vaut  $\ell = 3,81 \text{ m}$ . La masse de l'équipage mobile vaut  $m = 4,0 \text{ g}$ .



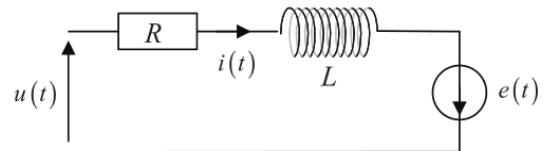
#### III.1 - Étude temporelle du fonctionnement

15) Pourquoi qualifie-t-on le haut-parleur de convertisseur électromécanique ?

On applique aux bornes de la bobine une tension variable  $u(t)$ . La bobine est alors traversée par un courant d'intensité  $i(t)$  et la membrane se déplace avec la vitesse  $v(t)$ .

16) Justifier précisément l'apparition d'une f.é.m. induite  $e(t)$  aux bornes de la bobine.

17) Le schéma électrique équivalent de la bobine est donné ci-contre. Donner la relation qui lie  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $di/dt$  et  $e(t)$ . Que représente chacun des termes de cette équation dite électrique ?

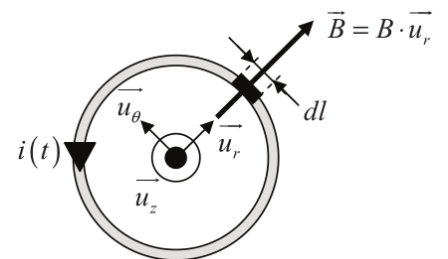


Pour la suite du problème, on posera  $e(t) = v(t) B \ell$ .

18) Donner l'expression de la force élémentaire de Laplace  $d\vec{F}_L$  exercée sur une portion de conducteur de longueur  $d\ell$  en fonction de  $i(t)$ ,  $d\ell$ ,  $B$  et  $\vec{u}_z$ .

En prenant l'origine des  $z$  comme étant la position d'équilibre du centre d'inertie de l'équipage mobile (bobine + membrane), le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système donne la relation suivante :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -i(t)\ell B \vec{u}_z - k z(t) \vec{u}_z - \lambda \vec{v}$$



19) Interpréter les différents termes de cette relation. En déduire une équation reliant  $i(t)$  à  $z(t)$  et ses dérivées. L'équation ainsi obtenue est appelée équation mécanique.

#### III.2 - Régime sinusoïdal forcé

La tension appliquée est supposée sinusoïdale, de fréquence  $f$  :  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$  et  $\omega = 2\pi f$ . Nous utiliserons le formalisme complexe qui, à toute fonction sinusoïdale du type  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$  associe la fonction complexe  $\underline{a}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ . On rappelle que  $j$  est le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ .

20) Ecrire les équations mécanique et électrique en utilisant le formalisme complexe.

21) En déduire l'expression de l'impédance du haut-parleur  $\underline{Z}(\omega) = \underline{u}(\omega)/\underline{i}(\omega)$ .

Cette impédance  $\underline{Z}(\omega)$  correspond à la mise en série de deux impédances : l'une  $\underline{Z}_e(\omega)$  appelée impédance propre, qui ne contient que des termes relatifs au circuit électrique et l'autre  $\underline{Z}_m(\omega)$  appelée impédance motionnelle, qui ne dépend que des caractéristiques mécaniques du système.

22) Préciser les expressions de  $\underline{Z}_e(\omega)$  et  $\underline{Z}_m(\omega)$ .

23) Montrer que l'admittance motionnelle  $\underline{Y}_m(\omega) = 1/\underline{Z}_m(\omega)$  peut se mettre sous la forme :

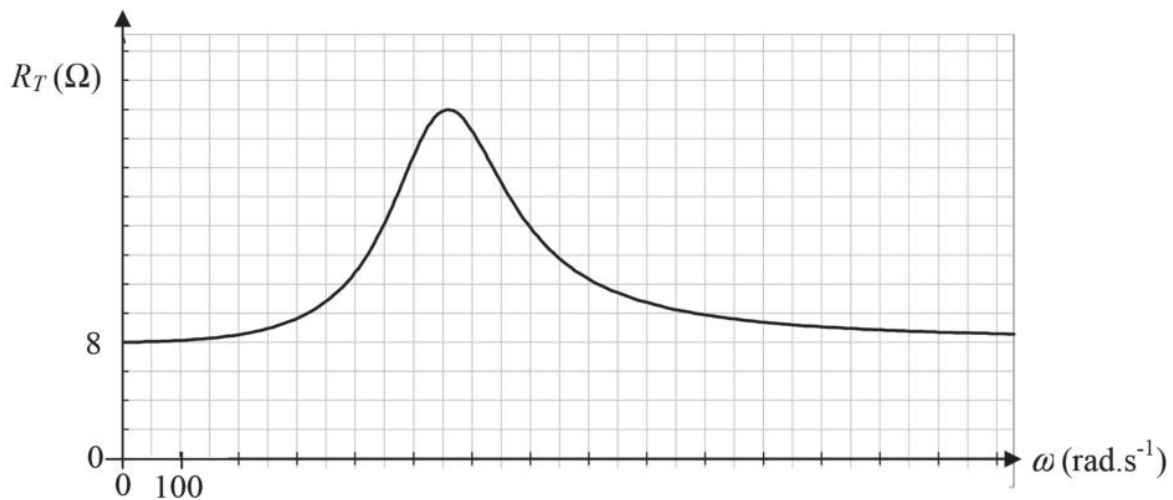
$$\underline{Y}_m(\omega) = j\omega C_m + \frac{1}{j\omega L_m} + \frac{1}{R_m}$$

Préciser les expressions de  $C_m$ ,  $L_m$  et  $R_m$  en fonction de  $\ell$ ,  $B$ ,  $k$ ,  $m$  et  $\lambda$ . On donne  $k = 1\,250 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\lambda = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vérifier que  $C_m = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ ,  $L_m = 12,8 \text{ mH}$  et  $R_m = 16 \Omega$ .

24) Proposer un schéma électrique équivalent de l'impédance  $\underline{Z}(\omega)$  du haut-parleur dans lequel vous ferez apparaître  $R$ ,  $L$ ,  $C_m$ ,  $L_m$  et  $R_m$ .

25) On peut également poser que l'impédance du haut-parleur se compose d'une partie réelle  $R_T$  et d'une partie imaginaire  $X_T$  :  $\underline{Z}(\omega) = R_T + j X_T$ . Montrer alors que l'expression de  $R_T$  est la suivante :

$$R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \left( C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega} \right)^2}$$



26) En utilisant la courbe  $R_T = f(\omega)$  ci-dessous, déterminer la valeur numérique de la résistance  $R$  et montrer que la fréquence de résonance vaut  $f_{\text{res}} = 89 \text{ Hz}$ . Vérifier la cohérence de la valeur de  $f_{\text{res}}$  avec les données de l'énoncé.

### III.3 - Étude énergétique

Nous ferons l'hypothèse que la transformation de l'énergie mécanique des parties mobiles en énergie acoustique s'effectue sans perte.

27) Etablir le bilan de puissance électrique global sous la forme :

$$u(t) i(t) = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} + \mathcal{P}_J(i(t)) + \mathcal{P}_L(v(t))$$

Préciser les expressions de  $\mathcal{E}_{\text{mag}}$ ,  $\mathcal{P}_J(i(t))$  et  $\mathcal{P}_L(v(t))$ . Interpréter chacun des termes du bilan.

28) Etablir le bilan de puissance mécanique global sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(v(t))}{dt} + \mathcal{P}_A(v(t)) + \frac{d\mathcal{E}_{\text{pe}}(z(t))}{dt} = \mathcal{P}_L(v(t))$$

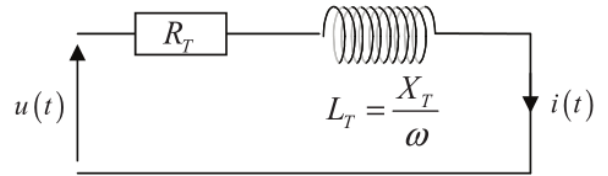
Préciser les expressions de  $\mathcal{E}_c(v(t))$ ,  $\mathcal{E}_{\text{pe}}(z(t))$  et  $\mathcal{P}_A(v(t))$ . Interpréter chacun des termes du bilan.

29) Montrer que la puissance moyenne  $\langle \mathcal{P}_S(t) \rangle$  fournie par l'alimentation électrique est reliée à la valeur moyenne du courant au carré consommé par le haut-parleur  $\langle i^2(t) \rangle$  et à la valeur moyenne de la vitesse au carré de l'équipage mobile  $\langle v^2(t) \rangle$  par la relation :

$$\langle \mathcal{P}_S(t) \rangle = R \langle i^2(t) \rangle + \lambda \langle v^2(t) \rangle$$

Lequel de ces deux termes correspond à la puissance moyenne utile pour générer un son ? En déduire l'expression du rendement  $\eta$  du haut-parleur.

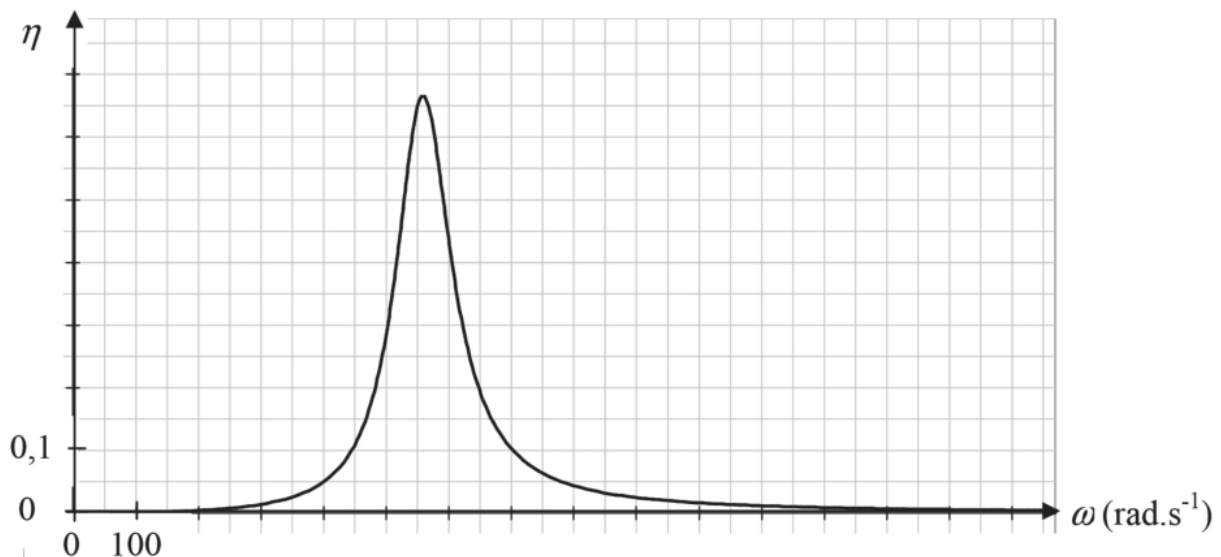
La tension  $u(t)$  appliquée aux bornes du haut-parleur est une tension alternative sinusoïdale, de valeur efficace  $U_{\text{eff}}$ . La bobine est alors traversée par un courant  $i(t)$  alternatif sinusoïdal d'intensité efficace  $I_{\text{eff}}$ . On rappelle que le haut-parleur peut se modéliser comme indiqué ci-contre.



30) Montrer que le rendement  $\eta$  défini à la question précédente a pour expression :

$$\eta = \frac{R_T - R}{R_T}$$

31) On donne ci-dessous, la représentation du rendement  $\eta$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Pour quelle fréquence le rendement est-il maximal ? Est-ce en accord avec les valeurs numériques précédentes ? Justifier votre réponse.



32) Dans quelle gamme de fréquences l'utilisation du haut-parleur est-elle intéressante ? Rappeler l'intervalle de fréquences dans lequel l'oreille humaine entend les sons.

33) Expliquer pourquoi les enceintes acoustiques comportent plusieurs haut-parleurs.

----- Fin de la partie III -----

## I - Tige en rotation

1) Avant toute chose, il faut définir le sens arbitraire du sens du courant.

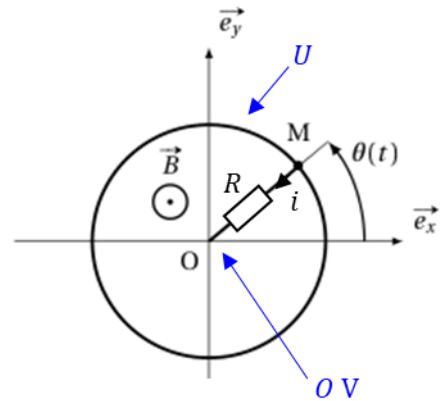
Avec cette convention, la loi d'Ohm donne :  $U = Ri$ .

Le champ  $\vec{B}$  étant uniforme, la force de Laplace s'écrit :

$$\vec{F}_L = i \overrightarrow{MO} \wedge \vec{B} = \frac{U}{R} aB \vec{e}_\theta$$

On en déduit le moment de la force, où cette dernière s'exerce au centre de la tige (car tige uniforme).

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_L) = \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_L \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{aBU}{2R}$$



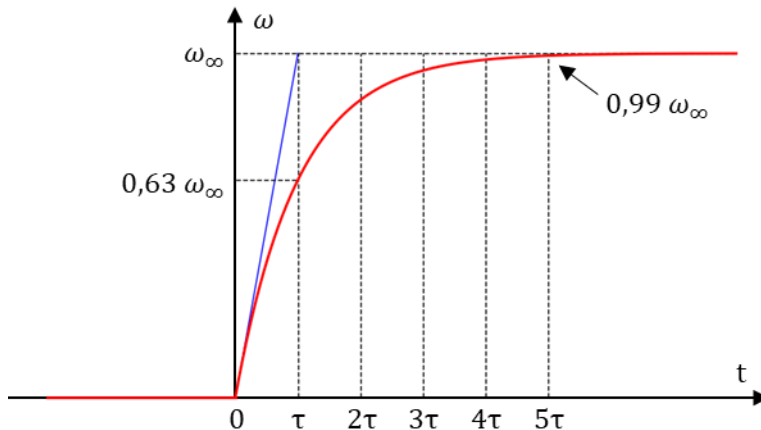
2) Le moment de la force :

$$\mathcal{M}_z(\vec{f}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{e}_z = (a\vec{e}_r \wedge -\alpha a\omega \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = -\alpha a^2 \omega$$

3) Le TMC dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne (moment de la liaison pivot nul) :

$$J\dot{\omega} = -\alpha a^2 \omega + \frac{aBU}{2R} \Rightarrow \dot{\omega} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_\infty}{\tau} \quad \text{avec : } \tau = \frac{J}{\alpha a^2} \quad \omega_\infty = \frac{BU}{2\alpha aR}$$

4)



----- Fin de la partie I -----

## II - Étude du fil infini

5) Cf. étude des symétries et invariances faites en cours :  $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$ .

### II.1 - Inductance mutuelle entre une spire et un fil

6) Par définition,  $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$  avec  $d\vec{S}$  vecteur surface élémentaire normal à la surface et orienté selon la règle de la main droite.

7) Il faut commencer par choisir un sens de parcours de la spire. On choisit  $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_4$ . Ainsi,

$$\phi_{fil \rightarrow spire} = \iint_{spire} \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \right) \cdot (dr dz \vec{e}_\theta) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^b dz \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \ln \left( 1 + \frac{b}{a} \right)$$

8) Par définition,

$$M = \frac{\phi_{fil \rightarrow spire}}{i_{fil}} = \frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

9) La distance à l'axe augmente, tous les autres paramètres sont constants. Donc le flux diminue (on se déplace vers des champs moins intenses). D'après la loi de Lenz, un courant  $i_2$  apparaît pour contrer cette diminution de flux. Il faut  $i_2 > 0$  dans le sens de parcours choisi pour générer un flux induit  $> 0$ .

10) Loi de Faraday et loi des mailles :

$$e = -\frac{d\phi_{fil \rightarrow spire}}{dt} = Ri_2 \Rightarrow i_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi R} b \cdot \frac{d}{dt} \left( \ln\left(1 + \frac{b}{v_0 t + a_0}\right) \right)$$

$$\Rightarrow i_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi R} b \cdot \frac{-bv_0 / (v_0 t + a_0)^2}{1 + \frac{b}{v_0 t + a_0}}$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} b^2 v_0 \cdot \frac{1}{(v_0 t + a_0)^2 \cdot \left(1 + \frac{b}{v_0 t + a_0}\right)} > 0$$

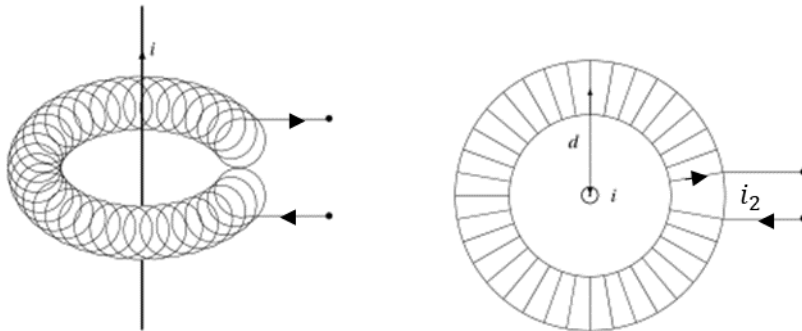
## II.2 - Pince ampèremétrique

11) On applique la formule de la question 5 :

$$B_{eff} = \frac{\mu_0 I_{eff}}{2\pi d} = 10 \mu T$$

Le champ n'est pas uniforme sur la spire (cf. partie précédente).

12) Il faut choisir un sens de parcours !



Loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\phi_{N \text{ spires}}}{dt} = -N \frac{d\phi_{1 \text{ spire}}}{dt} = -N \frac{d}{dt} (S \vec{e}_\theta \cdot B(t) \vec{e}_\theta) = \frac{\mu_0 NS}{2\pi d} \omega I_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

13) On en déduit :

$$E_{eff} = \frac{\mu_0 NS}{2\pi d} \omega I_{eff}$$

14) On doit avoir :

$$N = \frac{2\pi d \cdot E_{eff}}{2\pi f I_{eff} \cdot \mu_0 S} = 5 \cdot 10^3 \text{ spires}$$

----- Fin de la partie II -----

## III - Le haut-parleur électrodynamique

### III.1 - Étude temporelle du fonctionnement

15) La source fournit un signal électrique et on cherche à mettre en mouvement mécanique la membrane afin de générer des ondes mécaniques. On convertit donc une puissance électrique en puissance mécanique.

16) Le circuit est mobile et placé dans une zone de champ magnétique. Il peut donc y avoir création d'une fem induite. Pour déterminer la fem tout en restant dans le cadre du programme, il faut se placer en configuration du rail de Laplace.

17) On applique la loi des mailles :

$$u + e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Avec :

- $u$  la tension délivrée par le générateur ;
- $e$  : la fem induite au borne de la bobine (du au déplacement, sans prendre en compte l'induction propre) ;
- $L \frac{di}{dt}$  : la fem due à l'auto-induction (ici, placée en convention récepteur) ;
- $Ri$  : tension aux bornes de la résistance.

18) Force de Laplace sur une portion de conducteur de longueur  $d\ell$  :

$$d\vec{F}_L = i d\ell \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r = -iB d\ell \vec{u}_z$$

19) On reconnaît l'expression des différentes forces appliquées au système selon l'axe (Oz). On a :

- Force de Laplace (totale, en intégrant l'expression précédente) :  $\vec{F}_L = -i(t)\ell B \vec{u}_z$  ;
- Force de rappel élastique :  $\vec{F}_{el} = -k z(t) \vec{u}_z$  ;
- Force de frottement fluide avec l'air :  $\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}$ .
- Dérivée de la quantité de mouvement :  $m \frac{d\vec{v}}{dt}$ .

En projetant selon l'axe (Oz), on en déduit :

$$m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = -i\ell B$$

### III.2 - Régime sinusoïdal forcé

20) On passe en RSF :

$$\begin{aligned} (EE) \quad \underline{u} &= (R + j\omega L) \underline{i} - \underline{v} B\ell \\ (EM) \quad \left( j\omega m + \lambda + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{v} &= -\underline{i} \ell B \end{aligned}$$

21) On isole  $\underline{v}$  grâce à (EM) et on l'injecte dans (EE).

$$\underline{u} = (R + j\omega L) \underline{i} - \frac{-\ell B \underline{i}}{j\omega m + \lambda + \frac{k}{j\omega}} B\ell \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + j\omega L + \frac{\ell^2 B^2}{j\omega m + \lambda + \frac{k}{j\omega}}$$

22) On a :

$$\underline{Z}_e = R + j\omega L \quad \underline{Z}_m = \frac{\ell^2 B^2}{j\omega m + \lambda + \frac{k}{j\omega}}$$

23) On a :



$$\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{j\omega m + \lambda + \frac{k}{j\omega}}{\ell^2 B^2} = \frac{j\omega m}{\ell^2 B^2} + \frac{\lambda}{\ell^2 B^2} + \frac{k}{j\omega \ell^2 B^2}$$

On trouve bien la forme demandée et on pose :

$$\boxed{C_m = \frac{m}{\ell^2 B^2} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ F}}$$

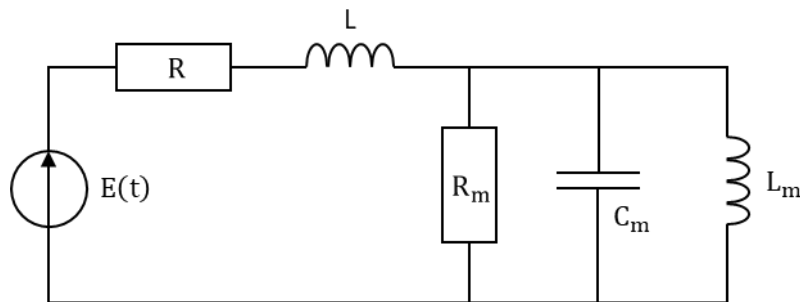
$$\boxed{R_m = \frac{\ell^2 B^2}{\lambda} = 16 \Omega}$$

$$\boxed{L_m = \frac{\ell^2 B^2}{k} = 12,8 \text{ mH}}$$

24) L'impédance équivalente vaut :

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_m + \frac{1}{j\omega L_m} + \frac{1}{R_m}}$$

On a donc le circuit équivalent suivant.



25) Multiplions la fraction par le complexe conjugué du dénominateur :

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R_m} + j\left(\omega C_m - \frac{1}{\omega L_m}\right)} = R + j\omega L + \frac{\frac{1}{R_m} - j\left(\omega C_m - \frac{1}{\omega L_m}\right)}{\left(\frac{1}{R_m}\right)^2 + \left(\omega C_m - \frac{1}{\omega L_m}\right)^2}$$

On en déduit :

$$\boxed{R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \left(\omega C_m - \frac{1}{\omega L_m}\right)^2}} \quad X_T = \omega L - \frac{R_m^2 \left(\omega C_m - \frac{1}{\omega L_m}\right)}{1 + R_m^2 \left(\omega C_m - \frac{1}{\omega L_m}\right)^2}$$

26) On remarque que si  $\omega \rightarrow 0$  ou  $\omega \rightarrow \infty$ , alors  $R_T \rightarrow R$ . On en déduit  $\boxed{R = 8 \Omega}$ .

La résonance a lieu lorsque  $R_T$  est, donc lorsque  $\omega C_m - \frac{1}{\omega L_m} = 0$ . On en déduit :  $\omega_{\text{res}} = 1/\sqrt{L_m C_m} = 559 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On en déduit :  $\boxed{f_{\text{res}} = 89 \text{ Hz}}$ .

Graphiquement, on observe bien  $\boxed{\omega_{\text{res}}^{\text{graph}} \approx 560 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$

### III.3 - Étude énergétique

27) On multiplie (EE) par  $i$ .

$$u i = R i^2 + L i \frac{di}{dt} - B \ell v i \Rightarrow \boxed{u i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) + R i^2 - B \ell v i}$$

On identifie :

- $\boxed{\mathcal{P}_S(t) = u i}$  puissance fournie par le générateur ;
- $\boxed{\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2}$  énergie magnétique stockée dans la bobine ;
- $\boxed{\mathcal{P}_J = R i^2}$  puissance dissipée par effet Joule ;
- $\boxed{\mathcal{P}_L = -B \ell v i}$  opposée de la puissance de la force électromotrice, égale à la puissance des forces de Laplace.

28) On multiplie (EM) par  $v$ .

$$m\dot{v} + \lambda v^2 + kzv = -i\ell Bv \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \lambda v^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kz^2\right) = -B\ell v i}$$

On identifie :

- $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$  énergie cinétique ;
- $\mathcal{P}_A = \lambda v^2$  opposée de la puissance de la force de frottement fluide ;
- $\mathcal{E}_{pe} = \frac{1}{2}kz^2$  énergie potentielle élastique ;
- $\mathcal{P}_L = -B\ell v i$  puissance des forces de Laplace.

29) Toute fonction périodique  $f(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = f_{\text{moy}} + g(t)$$

où  $f_{\text{moy}} = \langle f(t) \rangle$  est la valeur moyenne de  $f(t)$  et  $g(t) = f(t) - \langle f(t) \rangle$  une fonction périodique de moyenne nulle.

Déterminons  $\langle \frac{df(t)}{dt} \rangle$ . On se place en notation complexe :

$$\langle \frac{df(t)}{dt} \rangle = \langle \frac{dg(t)}{dt} \rangle = \langle j\omega g \rangle = j\omega \langle g \rangle = 0$$

Ainsi, pour toute fonction périodique,

$$\boxed{\langle \frac{df(t)}{dt} \rangle = 0}$$

On somme les deux bilans d'énergie :

$$\mathcal{P}_S(t) = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} + \mathcal{P}_J(i(t)) + \frac{d\mathcal{E}_c(v(t))}{dt} + \mathcal{P}_A(v(t)) + \frac{d\mathcal{E}_{pe}(z(t))}{dt}$$

On prend la valeur moyenne de cette expression :

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_S \rangle = \langle \mathcal{P}_J \rangle + \langle \mathcal{P}_A \rangle = R \langle i^2 \rangle + \lambda \langle v^2 \rangle}$$

L'objectif de ce haut-parleur est de générer des ondes mécaniques. Le couplage s'effectue ici par la force « de frottement fluide ». La puissance utile correspond donc aux interactions avec l'air, donc à  $\langle \mathcal{P}_A \rangle$ .

On en déduit l'expression du rendement :

$$\boxed{\eta = \frac{\langle \mathcal{P}_A \rangle}{\langle \mathcal{P}_S \rangle} = 1 - \frac{R \langle i^2 \rangle}{\langle \mathcal{P}_S \rangle}}$$

30) Dans une impédance, la partie réelle dissipe de l'énergie par effet Joule et la partie imaginaire la stocke sous forme inductive et/ou capacitive. Ainsi,

$$\langle \mathcal{P}_S \rangle = R_T \langle i^2 \rangle \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{R \langle i^2 \rangle}{R_T \langle i^2 \rangle} = 1 - \frac{R}{R_T} = \frac{R_T - R}{R_T}}$$

31) Le rendement est maximal lorsque  $R_T$  est maximal. Si s'agit donc de la même fréquence que précédemment, comme le confirme la courbe.

32) On va rechercher la zone de rendement maximal, soit autour de  $f_{\text{res}} = 89$  Hz. L'oreille a une bande passante allant environ de 20 Hz à 20 kHz. Ce haut-parleur restitue donc les sons graves.

33) Une enceinte doit restituer avec un même rendement l'ensemble du spectre audible. Or le rendement du haut-parleur décroît rapidement lorsque l'on s'éloigne de la pulsation de résonance. Il ne peut donc couvrir de façon acceptable l'ensemble du spectre audible. Il est donc nécessaire d'avoir des haut-parleurs avec des bandes passantes spécifiques grave-médium-aigu en général.