

Ce sujet est constitué de **5 parties indépendantes**, que les candidats pourront traiter dans l'ordre de leur choix.

### La calculatrice est autorisée

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

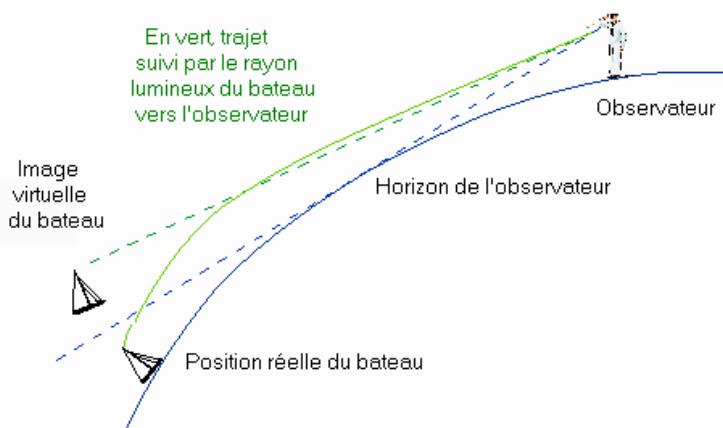
## I - Propagation géométrique de la lumière

Dans le modèle géométrique de la lumière, on représente la trajectoire de l'énergie lumineuse dans un milieu d'indice de réfraction  $n(M)$  au point  $M$ , par une courbe géométrique  $C$  nommée rayon lumineux. L'objectif de cette partie est l'obtention d'une équation différentielle dont la solution admet cette courbe pour graphe.

- 1) Définir la notion de milieu linéaire, homogène, transparent et isotrope. Quelle est la trajectoire d'un rayon lumineux dans un tel milieu ?
- 2) Rappeler les lois de Descartes et faire un dessin pour les illustrer. Au cours de quel siècle ces lois ont-elles été proposées ?
- 3) On considère un dioptre délimitant deux milieux d'indice constants  $n_1$  et  $n_2$ . Expliquer la notion de réflexion totale. Démontrer qu'il existe un angle d'incidence limite  $i_{lim}$  pour la réfraction. On exprimera  $i_{lim}$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .

Il est possible de montrer que l'indice optique de l'air dépend de la température. Ainsi, lorsque la température n'est pas homogène, alors l'indice optique varie. C'est ce phénomène qui donne naissance aux mirages.

Un mirage supérieur survient lorsque l'air proche du sol est plus froid qu'en hauteur. C'est notamment le cas en mer, où cette dernière refroidit les couches d'air proches de sa surface. Le gradient de température courbe les rayons lumineux et notre cerveau, qui pense que les rayons ont voyagé en ligne droite, peut alors se représenter un bateau flottant dans les airs.



Images issues de Wikipédia

Dans la suite, nous allons chercher à obtenir l'équation de propagation du rayon lumineux.

Pour cela, on étudie la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu non homogène le long d'une direction. On considère pour cela dans un premier temps, le milieu stratifié représenté sur la figure 1 : chaque couche horizontale est repérée par un entier  $i$ , toutes les couches ont la même épaisseur et l'indice  $n_i$  de la couche  $i$  est constant. On suppose finalement que  $n_i$  décroît lorsque  $i$  augmente ( $n_i > n_j$  pour  $j > i$ ). On note  $\alpha_i$  l'angle entre le rayon qui se propage dans la couche d'indice  $n_i$  et l'axe horizontal.

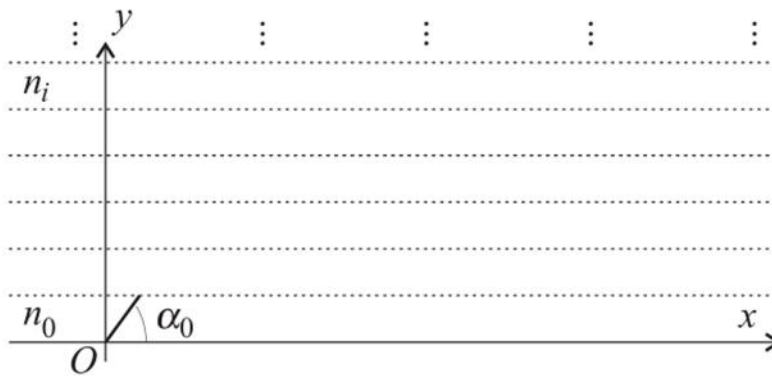


Figure 1 – Milieu inhomogène stratifié suivant Oy

4) Reproduire le schéma sur la copie et dessiner *qualitativement* la trajectoire du rayon lumineux dans les couches d'indice  $i = 0, 1, 2$  et 3.

5) En déduire que la quantité  $C_0 = n_i \cdot \cos(\alpha_i)$  est constante  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

Afin de déterminer l'équation différentielle de la trajectoire du rayon lumineux, on rend la stratification infiniment fine : l'épaisseur d'une couche est alors notée  $dy$ . À l'ordonnée  $y$ , l'indice de réfraction est  $n(y)$  et l'angle entre le rayon et l'horizontal est noté  $\alpha(y)$ .

On note  $ds$  la longueur du rayon lumineux dans une couche et  $dx$  la distance horizontale qu'il parcourt dans cette couche.

6) Exprimer  $ds$  en fonction de  $dy$  et  $dx$ . Exprimer  $n(y)$  en fonction de  $C_0$ ,  $ds$  et  $dx$ .

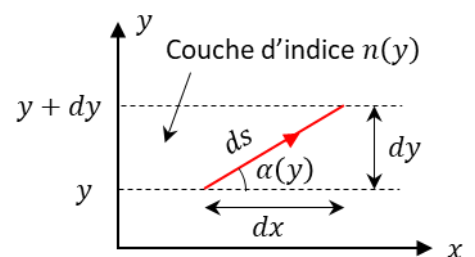
7) En déduire que la courbe  $C$  correspond à la solution de l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{n^2(y)}{\beta} \right)$$

où l'on exprimera  $\beta$  en fonction de  $C_0$ .

8) L'indice du milieu s'écrit sous la forme  $n^2(y) = n_0^2 + k \cdot y^2$ , où  $n_0 > 0$  et  $k < 0$ . Montrer que la fonction :  $y(x) = y_0 \sin\left(\frac{x}{\delta}\right)$  est une solution de l'équation différentielle précédente, passant par l'origine, où  $y_0$  est une constante et où l'on exprimera  $\delta$  en fonction de  $k$  et  $\beta$ .

9) Dessiner l'allure de la solution. Est-ce cohérent avec la question 4 ?



----- Fin de la partie I -----

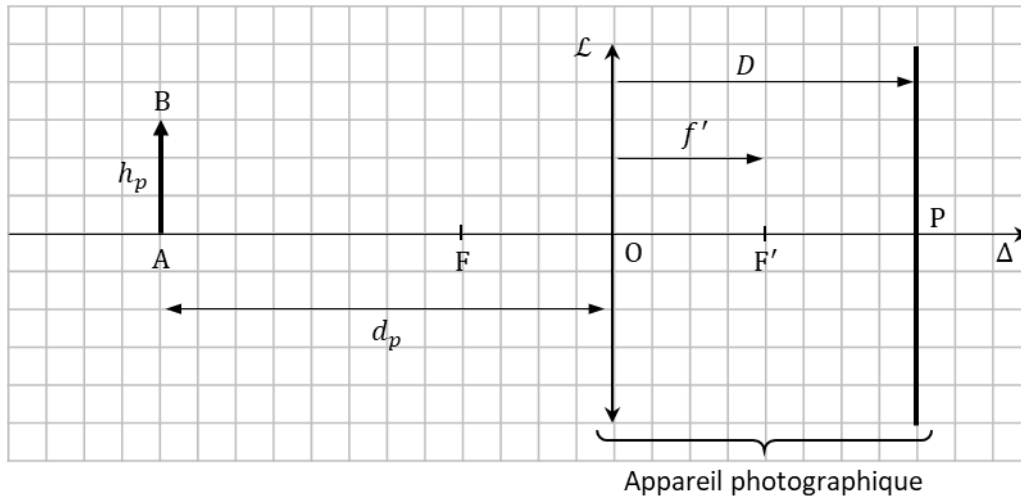
## II - Photographie d'un papillon

Dans tout le problème, on considère un papillon AB, de taille  $h_p = 4,0 \text{ cm}$ , situé à une distance  $d_p = 20 \text{ cm}$  d'un photographe.

### II.1 - Objectif standard

On s'intéresse dans un premier temps à un objectif standard d'appareil photographique, constitué d'une lentille convergente unique de centre O et de focale  $f' = 10 \text{ cm}$ . On note P l'intersection du plan du capteur avec l'axe optique.

Le schéma ci-dessous illustre la situation. Les échelles ne sont pas respectées.



10) Pour photographier le papillon, quelle doit être la distance  $D$  entre la lentille et le capteur pour que la photographie soit nette ? Quelle est, dans ce cas, la taille  $h'_p$  de l'image du papillon ?

11) Compléter l'annexe afin de vérifier les résultats de la question précédente par une construction géométrique.

## II.2 - Objectif alternatif

Au lieu d'un objectif à une lentille, on peut utiliser un autre montage en associant deux lentilles distantes d'une distance  $e$  : une lentille divergente  $\mathcal{L}_1$  de centre  $O_1$  et de focale  $f'_1 = -10 \text{ cm}$  et une lentille convergente  $\mathcal{L}_2$  de centre  $O_2$  et de focale  $f'_2 = 5,0 \text{ cm}$ . On donne :  $e = \overline{O_1O_2} = 60 \text{ mm}$ . On note  $d_p = \overline{AO_1}$  et P l'intersection du plan du capteur avec l'axe optique.

12) Compléter le schéma de l'annexe en faisant apparaître  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$ ,  $F_1$ ,  $F'_1$ ,  $F_2$  et  $F'_2$ , en respectant l'échelle suivante : 1 carreau  $\leftrightarrow$  1 cm.

On note  $A_1B_1$  l'image de AB à travers la lentille  $\mathcal{L}_1$  et  $A_2B_2$  l'image de  $A_1B_1$  à travers la lentille  $\mathcal{L}_2$ .

$$AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2B_2$$

13) Tracer sur l'annexe les images  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$ .

14) Quelle est la nature (réelle ou virtuelle) de l'image  $A_1B_1$  par rapport à la lentille  $\mathcal{L}_1$  ? de l'objet  $A_1B_1$  par rapport à la lentille  $\mathcal{L}_2$  ? de l'image  $A_2B_2$  par rapport à la lentille  $\mathcal{L}_2$  ?

15) Montrer que, pour photographier le papillon, on doit avoir :

$$D' = \overline{O_2P} = \frac{\left(-e + \frac{d_p f'_1}{d_p - f'_1}\right) f'_2}{\left(-e + \frac{d_p f'_1}{d_p - f'_1}\right) + f'_2}$$

Montrer de plus que la taille  $h'_p$  de l'image du papillon sur le capteur vaut :

$$h'_p = -h_p \times \frac{D'/d_p}{-e \frac{d_p - f'_1}{d_p f'_1} + 1}$$

16) Quel est l'avantage de chacun des deux objectifs ?

## II.3 - Présence d'une vitre

On modélise une vitre par une lame à face parallèles, c'est-à-dire un milieu transparent isotrope et homogène d'indice  $n$  et limité par deux plans parallèles distants de  $e$ . Les deux faces de la vitre sont baignées par l'air. On reprend dans cette partie l'objectif standard étudié à la partie 1).

On note  $d$  la distance entre le papillon et la face de la vitre la plus proche de lui.

17) Sur le schéma en annexe, construire l'image  $A_1B_1$  du papillon par la vitre. La construction fera intervenir deux rayons lumineux : l'un en incidence normale à la vitre et l'autre en incidence quelconque.

$$AB \xrightarrow{\text{Vitre}} A_1B_1$$

Quelle est la nature (réelle ou virtuelle) de l'image ?

18) Définir les conditions de Gauss. Montrer que, dans ces conditions, la position de cette image, notée  $d'$ , est donnée par :

$$d' = d + e \left( \frac{1}{n} - 1 \right)$$

On suppose que les conditions de Gauss sont respectées dans la suite de l'exercice.

19) Le photographe souhaite à présent photographier le papillon à travers la vitre. On suppose  $e < f'$ . La position de la vitre entre A et O a-t-elle de l'importance sur la position de l'image donnée par la lentille ? Justifier la réponse.

20) L'image du papillon est-elle toujours visible sur le capteur si ce dernier est placé à la distance  $D$  de la lentille (calculée à la question 10) ? Justifier la réponse.

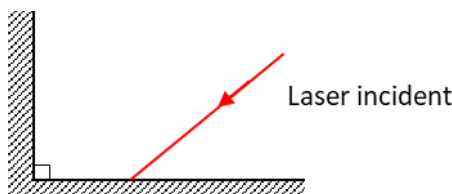
21) L'image du papillon par la lentille est-elle toujours réelle ? Justifier la réponse.

22) Conclure : à partir de quelle distance minimale  $d_m$  de O le papillon doit-il être placé pour être sûr de pouvoir observer une image sur le capteur (en le déplaçant éventuellement) lorsqu'il y a une vitre entre le papillon et le photographe ?

----- Fin de la partie II -----

### III - Mesure de la distance Terre - Lune

Dans le but de mesurer précisément la distance Terre-Lune, des missions américaines et russes ont déposé sur la lune des réflecteurs constitués de miroirs en « coins de cube ». Dans cet exercice, on considèrera que les miroirs sont en « coins de carré », comme sur le schéma suivant.



Données : vitesse de la lumière dans le vide  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

23) Reproduire le schéma ci-dessus et tracer le parcours du rayon lumineux réfléchi par le dispositif. Montrer rigoureusement que le rayon lumineux, après réflexion, repart parallèlement à sa direction initiale.

Les réflecteurs sont utilisés pour déterminer expérimentalement la distance Terre-Lune en mesurant la durée mise par une impulsion lumineuse créée par une source terrestre pour revenir à son point de départ, après réflexion sur la Lune (source et récepteur sont en même site). Lors d'un essai, on a mesuré une durée  $\Delta t = 2,464\,846\,865\,261\,4 \text{ s}$ .

24) Quelle est la distance source-récepteur lors de cet essai ?

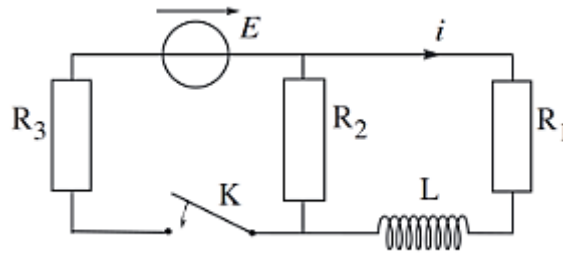
25) La source utilisée est un laser de longueur d'onde 1060 nm. Quel est le domaine de ce rayonnement ?

26) Avant d'être émise vers la Lune, ce rayonnement subit un doublement de fréquence (la fréquence de l'onde laser est multipliée par 2). Calculer la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière émise. Quelle est la couleur de cette lumière ?

----- Fin de la partie III -----

## IV - Étude d'une inductance

On considère le circuit ci-dessous, composé de 3 résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ , d'une bobine idéale d'inductance  $L$  et d'un générateur idéal de force électromotrice  $E$ . On suppose que l'interrupteur  $K$  est ouvert depuis un temps très grand devant le temps caractéristique d'évolution du circuit.



En  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

27) Dessiner le circuit équivalent en  $t = 0^-$ . En déduire  $i(0^-)$ .

28) Déterminer la valeur de  $i(0^+)$ .

29) Dessiner le circuit équivalent en  $t = +\infty$ . En déduire  $i(+\infty)$ , notée  $i_\infty$  dans la suite.

30) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  pour des temps  $t > 0$ . On pourra poser :

$$\tau = \frac{L(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

31) Déterminer la solution de cette équation différentielle. L'exprimer fonction de  $t$ ,  $\tau$  et  $i_\infty$ .

On suppose dans la suite que l'interrupteur  $K$  est fermé depuis un temps très grand devant le temps caractéristique d'évolution du circuit.

À  $t = 0$  (nouvelle origine des temps), on ouvre l'interrupteur.

32) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$ .

33) Déterminer l'énergie initialement stockée dans la bobine (en  $t = 0$ , lorsque l'on ouvre l'interrupteur), ainsi que l'énergie dissipée par effet Joule par l'ensemble des résistances entre  $t = 0$  et  $t = +\infty$ .

----- Fin de la partie IV -----

## V - Détermination expérimentale des caractéristiques d'une bobine

On souhaite déterminer les caractéristiques  $(L, r)$  d'un bobinage réel modélisé par l'association série d'une inductance  $L$  et d'une résistance interne  $r$ .

On applique une tension crête  $u_g(t)$ , de période  $T$ , évoluant entre 0 et 10 V, aux bornes d'un circuit constitué de la bobine réelle associée en série avec un conducteur ohmique de résistance  $R_0$ . On relève la tension  $u_R(t)$  aux bornes de  $R_0$ . Le générateur délivrant  $u_g(t)$  est doté d'une résistance interne  $R_g = 1,0 \Omega$ .

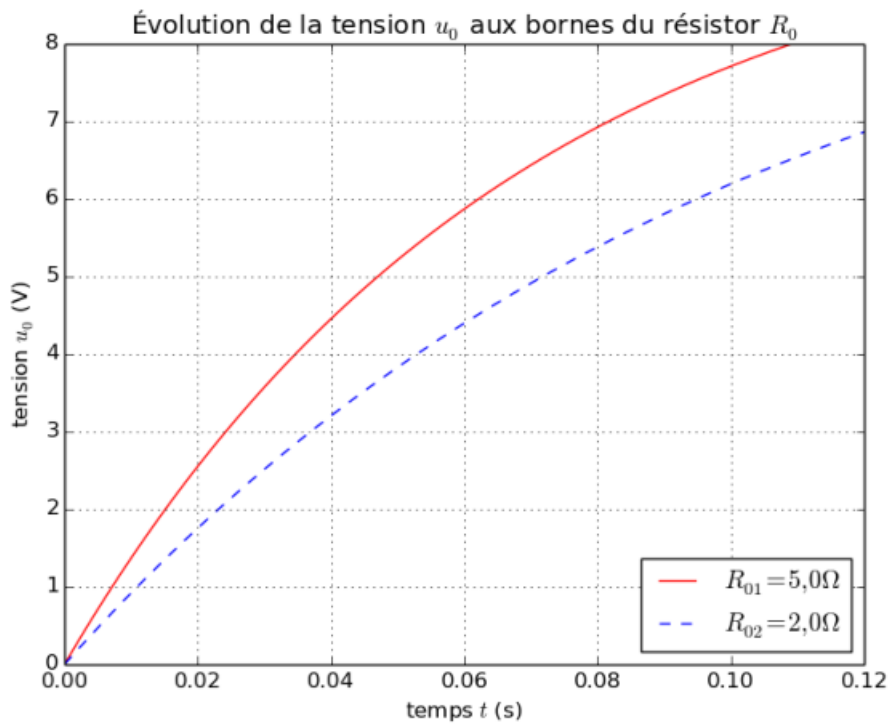
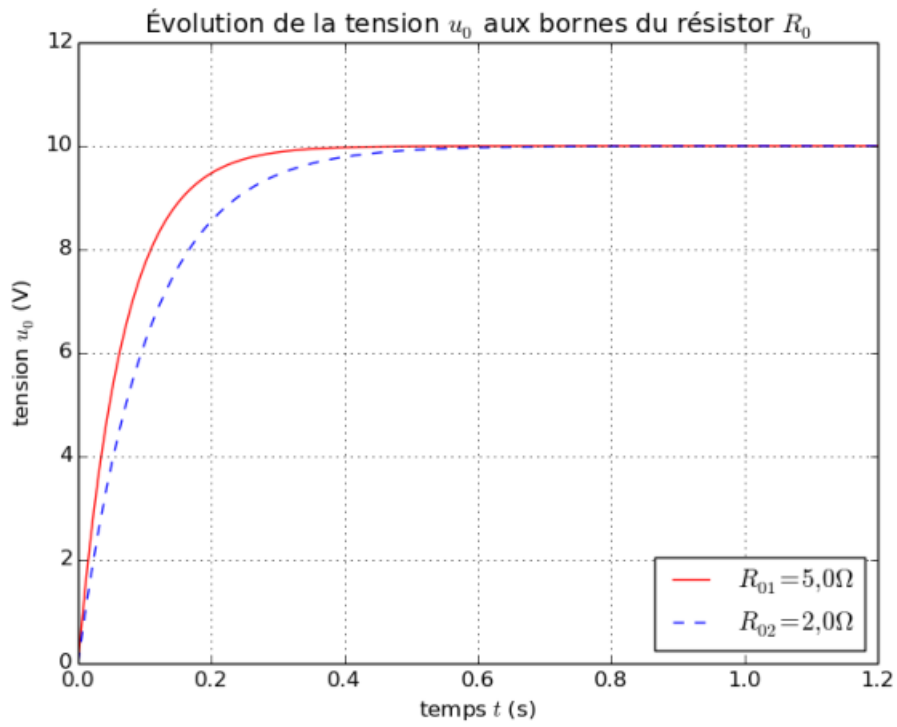
L'expérience est réalisée avec deux valeurs de  $R_0$ , respectivement  $R_{01} = 5,0 \Omega$  et  $R_{02} = 2,0 \Omega$ .

34) Donner l'ordre de grandeur des inductances que l'on trouve en salle de TP.

35) On suppose que, pour le bobinage étudié,  $L$  est de l'ordre de 1 H et que  $r$  est de l'ordre de 1  $\Omega$ . Quelle valeur de période  $T$  peut-on conseiller pour le générateur ? (Justifier la réponse).

36) En exploitant les relevés expérimentaux ci-dessous, présentant la tension  $u_R(t)$  en fonction du temps, déterminer les durées caractéristiques (constantes de temps)  $\tau_1$  et  $\tau_2$  relatives à l'évolution de l'intensité  $i(t)$  traversant le bobinage, obtenues respectivement pour  $R_{01} = 5,0 \Omega$  et  $R_{02} = 2,0 \Omega$ .

Les graphes fournis correspondent à une acquisition de  $u_R(t)$  réalisée sur une demi-période du générateur pour deux valeurs différentes de  $R_0$ . Ces courbes sont proposées à deux échelles différentes.



37) Établir une expression littérale de  $r$  en fonction des grandeurs  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $R_g$ ,  $R_{01}$  et  $R_{02}$ . Évaluer numériquement  $r$ .

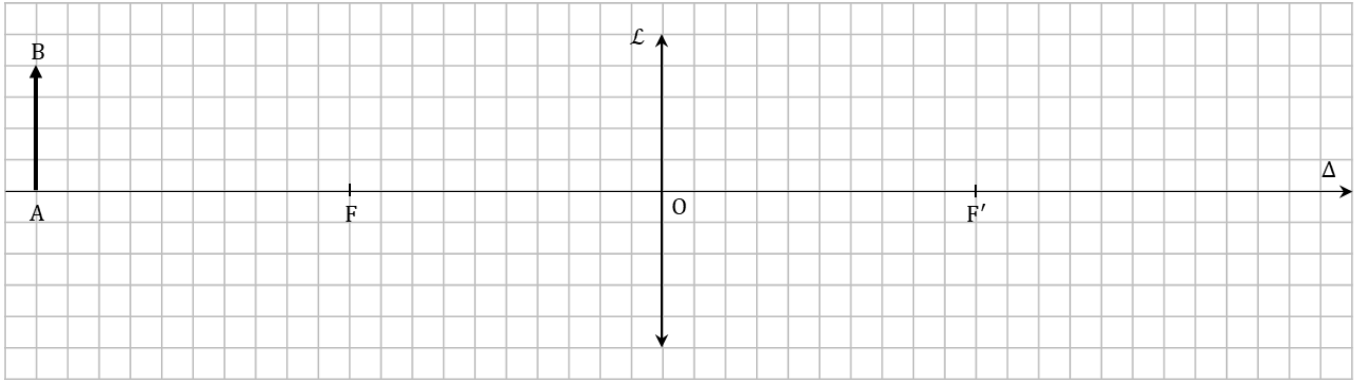
38) Dédire la valeur de  $L$  des mesures précédentes.

----- Fin de la partie V -----

## Annexe

L'annexe est à rendre avec la copie.

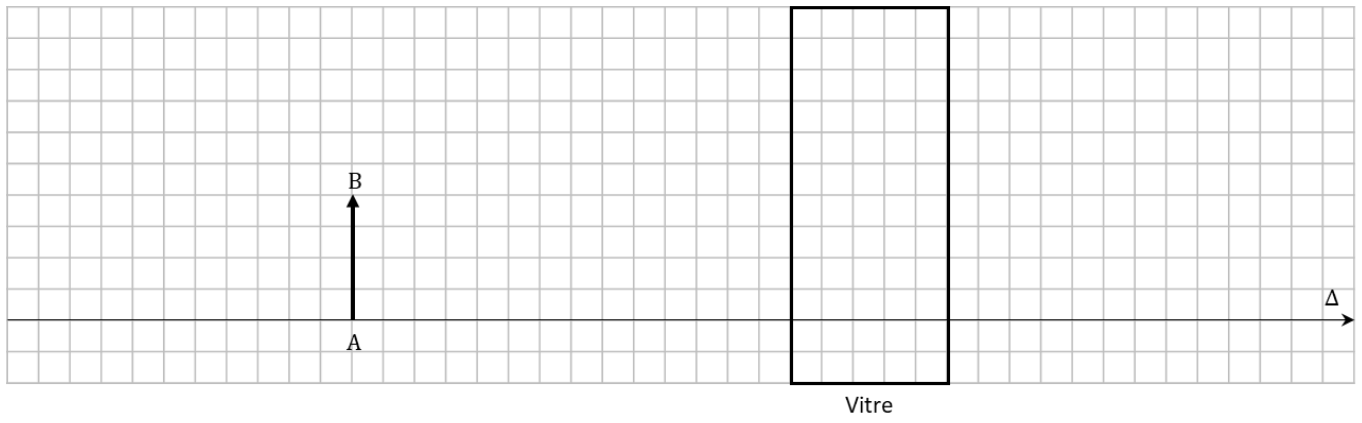
11) Échelle : 1 carreau  $\leftrightarrow$  1 cm.



12) et 13) Échelle : 1 carreau  $\leftrightarrow$  1 cm (3 exemplaires de la figure sont à votre disposition en cas d'erreur).



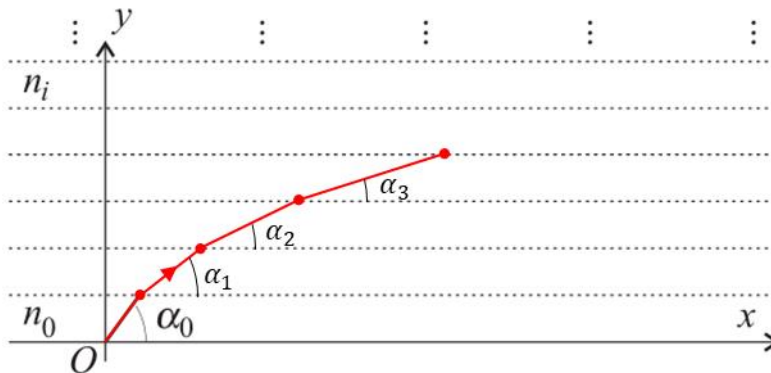
17)





I - Propagation géométrique de la lumière

- 1) Voir cours. Un milieu LHTI est caractérisé par son indice optique  $n$ . Dans un tel milieu, un rayon lumineux se propage en ligne droite.
- 2) Voir cours. Les lois ont été énoncées au XVIIe siècle.
- 3) Voir cours :  $n_1 \sin(i_{lim}) = n_2$ .
- 4) Lorsque le rayons se déplace vers le haut, il se passe d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent. Le rayon réfracté est donc dévié vers l'interface :  $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ .



5) Montrons par récurrence que la quantité  $C_0 = n_i \cdot \cos(\alpha_i)$  est constante  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

Initialisation :

On note  $I_0$  le point d'incidence entre les couches  $i = 0$  et  $i = 1$ . La loi de Snell-Descartes donne :

$$n_0 \sin(i_0) = n_1 \sin(i_1)$$

Or,  $i_k = \alpha_k - \frac{\pi}{2}$ .

On en déduit :

$$n_0 \sin\left(\alpha_0 - \frac{\pi}{2}\right) = n_1 \sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{n_0 \cos(\alpha_0) = n_1 \cos(\alpha_1)}$$

Transitivité :

On suppose la proposition vraie  $\forall i < k$ . Montrons qu'elle reste vraie pour  $i = k + 1$ .

On note  $I_k$  le point d'incidence entre les couches  $i = k$  et  $i = k + 1$ . La loi de Snell-Descartes donne :

$$n_0 \sin(i_0) = n_1 \sin(i_1)$$

Or,  $i_k = \alpha_k - \frac{\pi}{2}$ .

On en déduit :

$$n_k \sin(i_k) = n_{k+1} \sin(i_{k+1}) \Rightarrow n_k \sin\left(\alpha_k - \frac{\pi}{2}\right) = n_{k+1} \sin\left(\alpha_{k+1} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{n_k \cos(\alpha_k) = n_{k+1} \cos(\alpha_{k+1})}$$

Conclusion :

La quantité  $\boxed{C_0 = n_i \cdot \cos(\alpha_i)}$  est constante  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

6) Théorème de Pythagore :  $\boxed{(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2}$

On applique la propriété de la question précédente :

$$C_0 = n(y) \cdot \cos(\alpha(y)) \Rightarrow \boxed{C_0 = n(y) \frac{dx}{ds}}$$

7) Prenons le carré de l'expression précédente :

$$C_0^2 = n^2(y) \frac{(dx)^2}{(ds)^2} = n^2(y) \frac{(dx)^2}{(dx)^2 + (dy)^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n(y)}{C_0}\right)^2$$

Dérivons l'expression par rapport à  $x$ .

$$\frac{d}{dx} \left[ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] = \frac{d}{dx} \left[ \left(\frac{n(y)}{C_0}\right)^2 \right] \Rightarrow 2 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} \left[ \left(\frac{n(y)}{C_0}\right)^2 \right] \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{n^2(y)}{2 C_0^2} \right)}$$

On retrouve bien l'expression demandée par l'énoncé, en posant :  $\boxed{\beta = 2 C_0^2}$ .

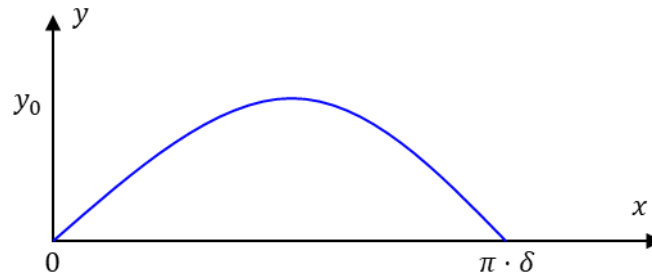
8) On a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y_0}{\delta^2} \sin\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dy} \left( \frac{n^2(y)}{\beta} \right) = \frac{2k}{\beta} y = \frac{2k}{\beta} y_0 \sin\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

On en déduit que  $y$  est bien solution, si l'on pose (rappel :  $k < 0$  et  $\beta > 0$ ) :

$$-\frac{y_0}{\delta^2} = \frac{2k}{\beta} y_0 \Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{-\frac{\beta}{2k}}}$$

9) Il s'agit d'une simple fonction sinus, en cohérence avec la question 4.



----- Fin de la partie I -----

## II - Photographie d'un papillon

### II.1 - Objectif standard

10) On a  $\overline{OA} = -d_p$  et on cherche  $\overline{OA'} = D$ . La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{D} + \frac{1}{d_p} = \frac{1}{f'}$$

Ainsi,

$$\boxed{D = \frac{f' d_p}{d_p - f'} = 20 \text{ cm}}$$

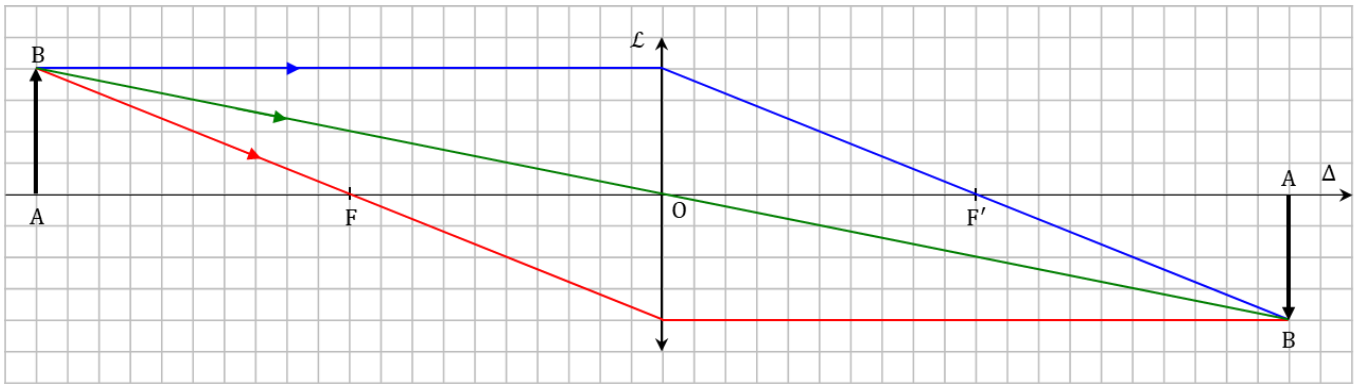
Le grandissement vaut :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{D}{d_p} = -1$$

L'image est de même taille et renversée. On a donc :

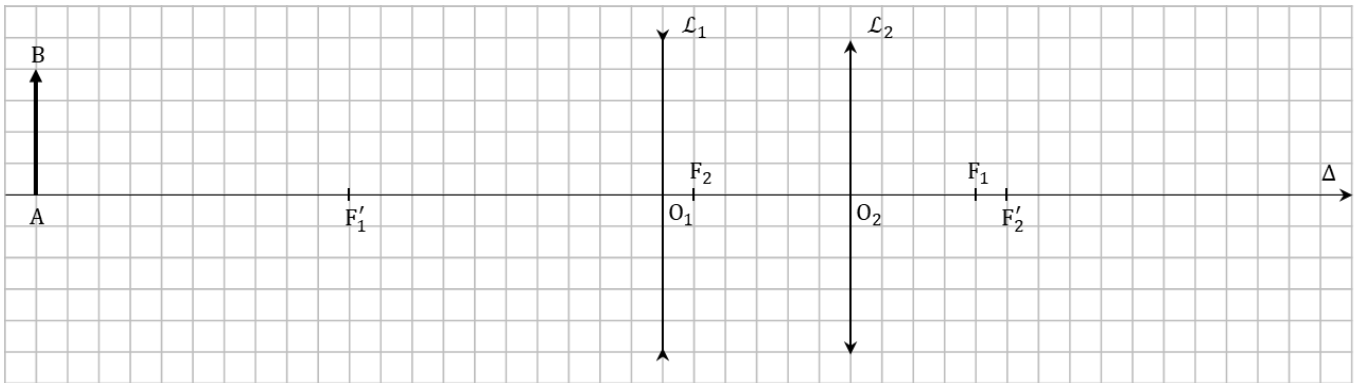
$$\boxed{h'_p = 4,0 \text{ cm}}$$

11)



## II.2 - Objectif alternatif

12)



13) Figure pour :  $AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1$

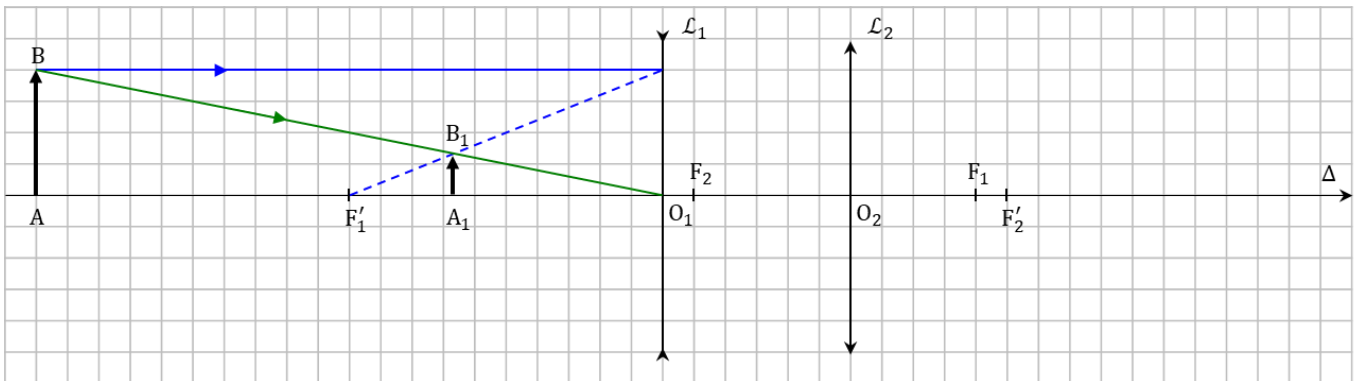
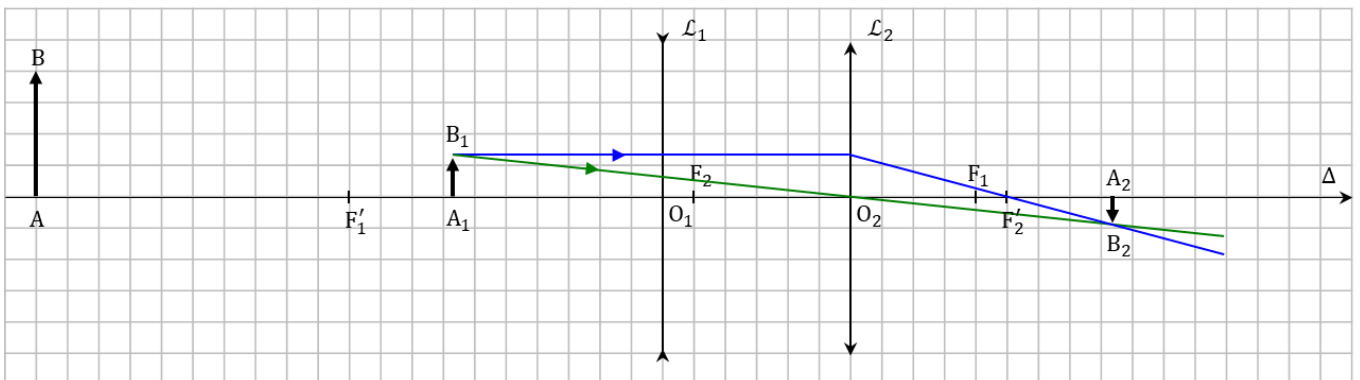


Figure pour :  $A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2B_2$ .



14)  $A_1B_1$  est une image virtuelle pour  $\mathcal{L}_1$ , un objet réel pour  $\mathcal{L}_2$ .  $A_2B_2$  est une image réelle pour  $\mathcal{L}_2$

15) Utilisons la relation de conjugaison de Descartes avec la lentille  $\mathcal{L}_1$  avec  $\overline{O_1A} = -d_p$ .

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \Rightarrow \overline{O_1A_1} = \frac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}$$

On en déduit la distance entre  $A_1$  et la seconde lentille.

$$\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e + \frac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}$$

On utilise finalement la relation de conjugaison de Descartes avec la seconde lentille.

$$\frac{1}{\overline{O_2P}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow D' = \overline{O_2P} = \frac{\overline{O_2A_1} f_2'}{\overline{O_2A_1} + f_2'}$$

On remplace par la formule trouvée précédemment.

$$D' = \frac{\left(-e + \frac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}\right) f_2'}{\left(-e + \frac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}\right) + f_2'} = 8,3 \text{ cm}$$

Pour trouver la taille de l'image, utilisons les formules de grandissement. On remarque que :

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}} = \underbrace{\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}}_{\gamma_1} \times \underbrace{\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}}_{\gamma_2} = \gamma_1 \gamma_2$$

Ainsi,

$$\gamma = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \times \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_2A_1}} = \left(\frac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}\right) \times \left(\frac{D'}{-e + \frac{d_p f_1'}{d_p - f_1'}}\right) = \frac{-D'/d_p}{-e \frac{d_p - f_1'}{d_p f_1'} + 1}$$

On en déduit :

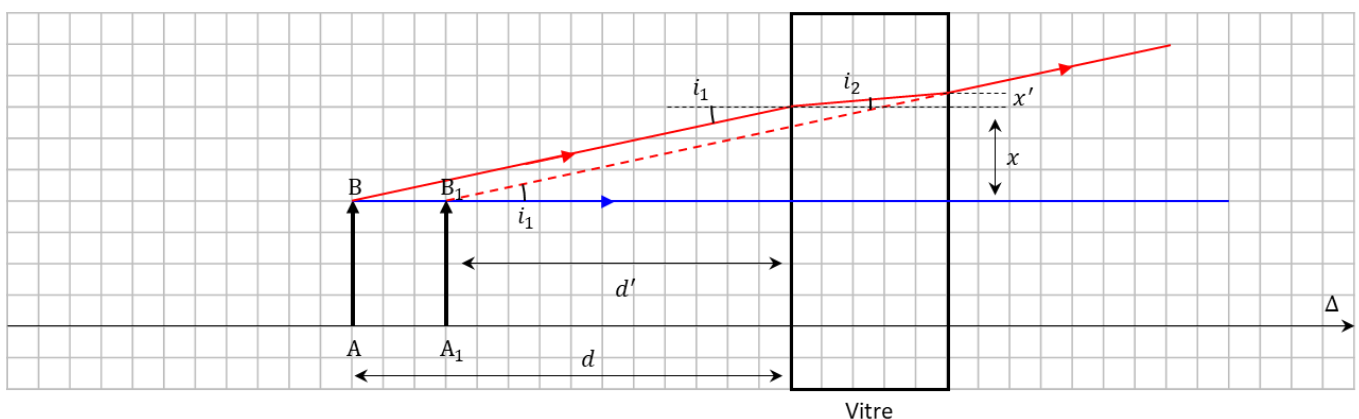
$$h_p' = |h_p \times \gamma| = -h_p \times \frac{D'/d_p}{-e \frac{d_p - f_1'}{d_p f_1'} + 1} = 0,87 \text{ cm}$$

Ces AN sont cohérentes avec le schéma précédent.

16) L'image avec le premier objectif est plus grande (donc une meilleure résolution, pour un même capteur) que celle avec l'objectif alternatif. Le deuxième objectif est plus compact.

### II.3 - Présence d'une vitre

17)



L'image est virtuelle.

18) Conditions de Gauss : rayons lumineux proches de l'axe optique et faiblement inclinés par rapport à l'axe optique.

On note  $i_1$  l'angle d'incidence dans l'air,  $i_2$  l'angle de réfraction dans le verre, et on définit sur le schéma ci-dessus les distances  $x, x', d$  et  $d'$ .

Dans les conditions de Gauss :

$$\tan(i_1) \approx i_1 = \frac{x}{d} = \frac{x+x'}{d'+e} \quad \tan(i_2) \approx i_2 = \frac{x'}{e}$$

Ainsi,

$$\frac{x}{d} = \frac{x+x'}{d'+e} \Rightarrow d'+e = d \frac{x+x'}{x} \Rightarrow d' = d \left(1 + \frac{x'}{x}\right) - e$$

De plus, les lois de Snell-Descartes dans les conditions de Gauss donnent :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \Rightarrow i_1 \approx n i_2$$

Ainsi :

$$i_2 = \frac{i_1}{n} \Rightarrow \frac{x'}{e} = \frac{x}{nd} \Rightarrow \frac{x'}{x} = \frac{e}{nd}$$

En combinant les deux expressions, on obtient :

$$d' = d \left(1 + \frac{e}{nd}\right) - e = d + e \left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

19) La distance entre le papillon et son image par la vitre est  $\Delta d = d - d' = e \left(1 - \frac{1}{n}\right)$  et ne dépend pas de la position de la vitre. Ainsi, la position de la vitre n'influe pas sur la position de l'image du papillon par la vitre, ni par conséquent sur celle de cette image par la lentille de l'appareil photo.

20) Le capteur était placé pour faire la mise au point sur le papillon. Or l'image du papillon à travers la vitre n'est pas située au même endroit que le papillon lui-même. Par conséquent, l'image du papillon n'est plus visible sur le capteur. Il faut changer la position du capteur.

21) Pour que l'image du papillon soit toujours réelle, il faut que  $\overline{OA'} > 0$ . Calculons cette distance à l'aide de la relation de conjugaison de Descartes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} &= \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{\overline{OA_1} f'}{\overline{OA_1} + f'} > 0 \\ &\Rightarrow \overline{OA_1} + f' < 0 \text{ car } \overline{OA_1} < 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\overline{OA_1} < -f'} \end{aligned}$$

L'image n'est réelle que si l'image du papillon à travers la vitre se trouve avant le foyer principal objet.

Remarque : on retrouve simplement ici la condition Objet réel  $\rightarrow$  Image réelle à travers une lentille convergente du cours.

22) On veut :

$$\begin{aligned} \overline{OA_1} = \overline{OA} + \overline{AA_1} < -f' &\Rightarrow \overline{OA} < -\overline{AA_1} - f' \\ &\Rightarrow \overline{OA} < -e \left(1 - \frac{1}{n}\right) - f' \end{aligned}$$

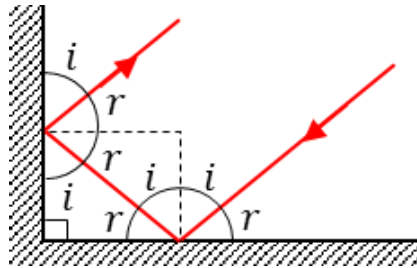
La distance minimale  $d_m$  entre O et le papillon pour être sûr de pouvoir observer une image sur le capteur lorsqu'il y a une vitre entre le papillon et le photographe est donc :

$$d_m = e \left(1 - \frac{1}{n}\right) + f' = 10,3 \text{ cm}$$

----- Fin de la partie II -----

### III - Mesure de la distance Terre - Lune

23) Les rayons incident et émergent font tous les deux un angle  $i$  avec la verticale (un angle  $r = \pi/2 - i$  avec l'horizontale). Ils sont donc parallèles.



24) La distance vaut (attention, la lumière fait un aller et un retour) :

$$d = \frac{c \cdot \Delta t}{2} = 369\,471\,250 \text{ m}$$

Remarque : l'orbite n'est pas parfaitement circulaire, la distance Terre - Lune varie entre 356 700 km et 406 300 km. Ce résultat est donc parfaitement cohérent.

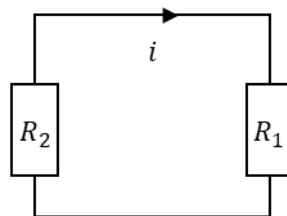
25) Il s'agit d'infrarouges.

26) La fréquence est multipliée par deux, la longueur d'onde est donc divisée par 2. On trouve  $\lambda = 530 \text{ nm}$ . C'est du vert.

----- Fin de la partie III -----

### IV - Étude d'une inductance

27) En  $t = 0^-$ , la bobine est équivalente à un fil. Le circuit équivalent est :

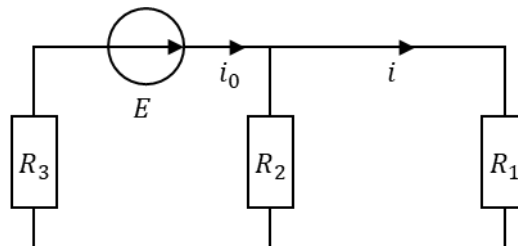


Une loi des mailles donne :

$$0 = (R_1 + R_2) \cdot i(0^-) \Rightarrow i(0^-) = 0$$

28) L'intensité à travers une bobine est toujours continue. Donc  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ .

29) En  $t = +\infty$ , la bobine est équivalente à un fil. Le circuit équivalent est :



La résistance équivalente de l'ensemble du circuit vaut :

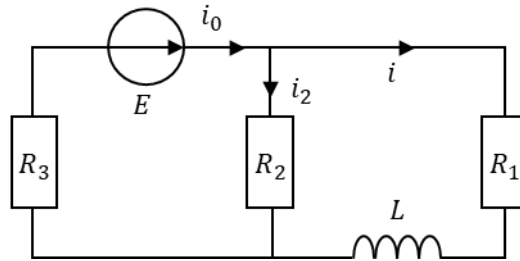
$$R_{eq} = R_3 + R_1 \parallel R_2 = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le générateur est alors parcouru par un courant d'intensité :  $i_0(+\infty) = \frac{E}{R_{eq}}$

On applique finalement la formule du pont diviseur de courant :

$$i(+\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_0(+\infty) = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \boxed{\frac{R_2}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2} \cdot E = i_\infty}$$

30)



On a :

$$\begin{aligned}
 E &= u_{R_1} + u_L + u_{R_3} && \leftarrow \text{loi des mailles} \\
 \Rightarrow E &= R_1 i + L \frac{di}{dt} + R_3 i_0 && \leftarrow \text{relations } i/u \\
 \Rightarrow E &= R_1 i + L \frac{di}{dt} + R_3 (i + i_2) && \leftarrow \text{loi des nœuds : } i_0 = i + i_2 \\
 \Rightarrow E &= (R_1 + R_3) i + L \frac{di}{dt} + \frac{R_3}{R_2} u_{R_2} \\
 \Rightarrow E &= (R_1 + R_3) i + L \frac{di}{dt} + \frac{R_3}{R_2} \left( R_1 i + L \frac{di}{dt} \right) && \leftarrow \text{loi des mailles : } u_{R_2} = u_{R_1} + u_L \\
 \Rightarrow L \left( 1 + \frac{R_3}{R_2} \right) \frac{di}{dt} + \left( R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} \right) i(t) &= E && \leftarrow \text{ré-arrangement des termes} \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E}{L \left( 1 + \frac{R_3}{R_2} \right)} = \frac{i_\infty}{\tau}} &&& \leftarrow \text{mise sous forme canonique}
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\tau = \frac{L \left( 1 + \frac{R_3}{R_2} \right)}{R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}} = \boxed{\frac{L(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}}$$

31) La solution de l'ED est :

$$i(t) = A e^{-t/\tau} + i_\infty$$

Or, en  $t = 0^+$ , on a :

$$i(0^+) = A + i_\infty = 0 \Rightarrow A = -i_\infty$$

Ainsi :

$$\boxed{i(t) = i_\infty \cdot (1 - e^{-t/\tau})}$$

32) Le nouveau circuit ne contient qu'une seule maille. La loi des mailles donne :

$$\begin{aligned}
 0 &= u_{R_1} + u_L + u_{R_2} \Rightarrow 0 = (R_1 + R_3) i + L \frac{di}{dt} \\
 &\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R_1 + R_3}{L} i(t) = 0}
 \end{aligned}$$

33) L'intensité (qui est continue lorsque l'on ouvre l'interrupteur) évolue de  $i_\infty$  (à  $t = 0^+$ ) à 0 (en  $t = +\infty$ ). On en déduit l'énergie initialement stockée dans la bobine :  $\mathcal{E}_{L,ini} = \frac{1}{2} L i_\infty^2$ . Cette énergie est entièrement cédée aux

résistances (car  $i = 0$  en  $t = +\infty$ ) :  $\mathcal{E}_{Joule} = \frac{1}{2} L i_\infty^2$ .

----- Fin de la partie IV -----

## V - Détermination expérimentale des caractéristiques d'une bobine

---

34) En TP, les bobines ont une inductance de l'ordre de 1 mH à 1 H.

35) Il faut que la période soit supérieure à  $10\tau$  (plus de  $5\tau$  pour la charge et plus de  $5\tau$  pour la décharge). Or, le circuit possède une résistance totale  $R_{eq} = R_g + r + R_0 = 4$  ou  $7 \Omega$ . Avec  $L = 1$  H, on obtient une constante de temps :

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 0,14 \text{ ou } 0,25 \text{ s}$$

Il faut donc choisir une période  $T \geq 2,5 \text{ s}$ .

36) On regarde sur le second graphique quand est-ce que la tension atteint 63 % de sa valeur finale (ie.  $u = 6,3 \text{ V}$ ).

On trouve :  $\tau_1 \approx 63 \text{ ms}$  et  $\tau_2 \approx 102 \text{ ms}$ .

37) On sait que, pour  $n = 1$  ou  $2$  :

$$\tau_n = \frac{L}{R_g + r + R_{0n}} \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{R_g + r + R_{02}}{R_g + r + R_{01}} \Rightarrow r(\tau_2 - \tau_1) = \tau_1(R_g + R_{01}) - \tau_2(R_g + R_{02})$$

Ainsi,

$$r = \frac{\tau_1(R_g + R_{01}) - \tau_2(R_g + R_{02})}{\tau_2 - \tau_1} = 1,8 \Omega$$

38) On a :

$$L = \tau_1(R_g + r + R_{01}) = \tau_2(R_g + r + R_{02}) = 0,49 \text{ H}$$

----- Fin de la partie V -----