Ce sujet est constitué de **6 parties indépendantes**, que les candidats pourront traiter dans l'ordre de leur choix.

La calculatrice est interdite

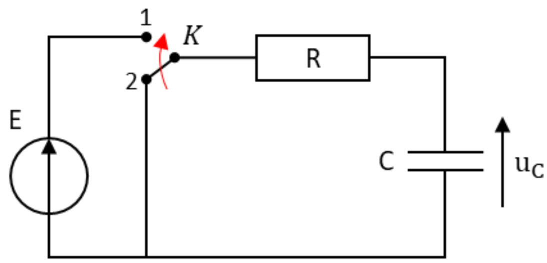
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Charge et décharge d'un condensateur

On considère ce circuit ci-dessous. Le générateur est supposé idéal, de forme électromotrice E.



À l'instant $t = 0$, on place l'interrupteur K dans la position (1), le condensateur étant déchargé.

1) Pour $t > 0$, exprimer la tension $U_c(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de E, R, C et t. Dans la suite, on posera $\tau = RC$.

2) Donner l'allure de la courbe $U_c(t)$.

3) Déterminer l'énergie stockée par le condensateur au cours de la charge.

4) Déterminer le rendement η de la charge, rapport entre l'énergie stockée par le condensateur et l'énergie fournie par le générateur. Que devient la puissance qui n'est pas stockée par le condensateur ?

Le condensateur est maintenant chargé : $U_c = E$. À l'instant $t = 0$ (nouvelle origine des temps), on place l'interrupteur K dans la position (2).

5) Exprimer la tension $U_c(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de E, R, C et t.

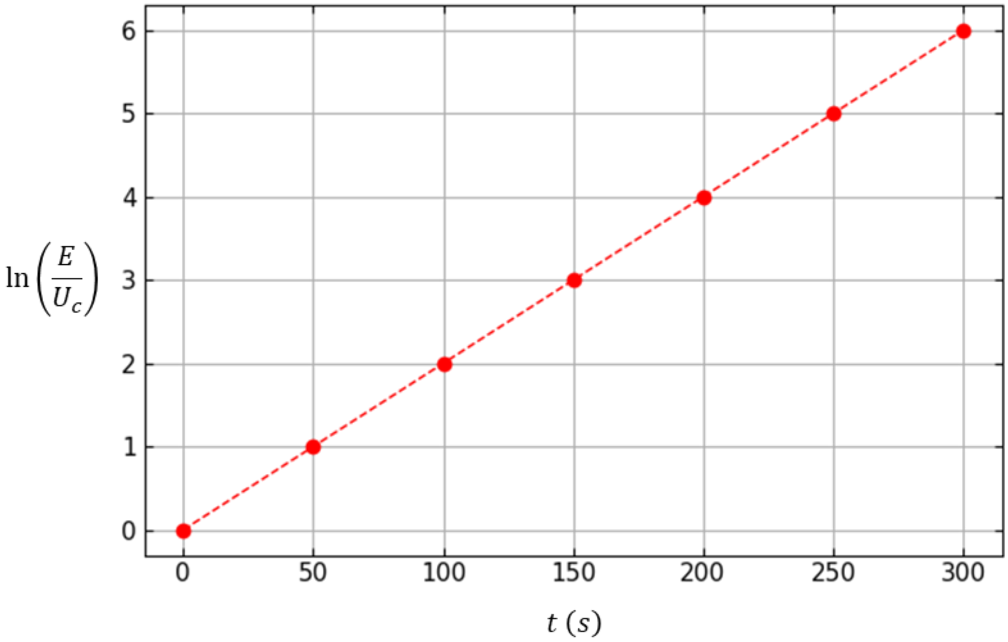
6) Tracer la courbe $\ln\left(\frac{E}{U_c}\right)$ en fonction de t.

On donne : $R = 10\ \mathrm{M\Omega}$, $C = 10\ \mathrm{\mu F}$ et $E = 10\ \mathrm{V}$.

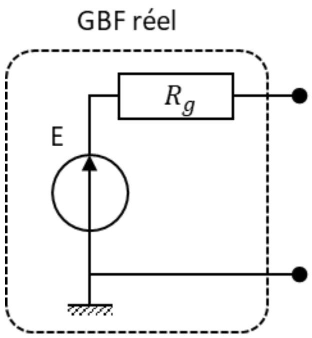
On branche un voltmètre numérique aux bornes du condensateur et on étudie la décharge du condensateur à partir de l'instant $t = 0$ où l'on bascule l'interrupteur K dans la position (2).

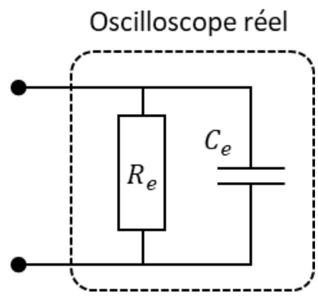
On trace ci-après la courbe $\ln\left(\frac{E}{U_c}\right)$ en fonction du temps.

7) Montrer que les résultats expérimentaux sont en accord avec la théorie, à condition de considérer que le condensateur se décharge également dans le voltmètre, modélisé par une résistance de valeur R' que l'on déterminera.



On reprend l'expérience de la charge du condensateur en remplaçant le générateur idéal par un générateur réel de tension. De plus, on mesure la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope. Les modélisations réelles du générateur et de l'oscilloscope sont données ci-dessous.





$R_g = 50\ \Omega$ $\qquad$ $R_e = 1\ \text{M}\Omega$ $\qquad$ $C_e = 20\ \text{pF}$

8) Montrer que $U_c(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Préciser l'expression exacte de la constante de temps τ, ainsi que son expression analytique approchée.

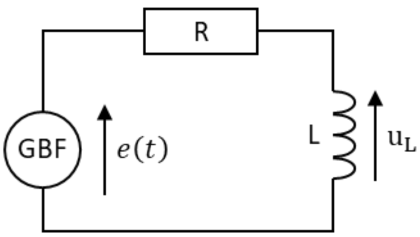
-- Fin de la partie I --

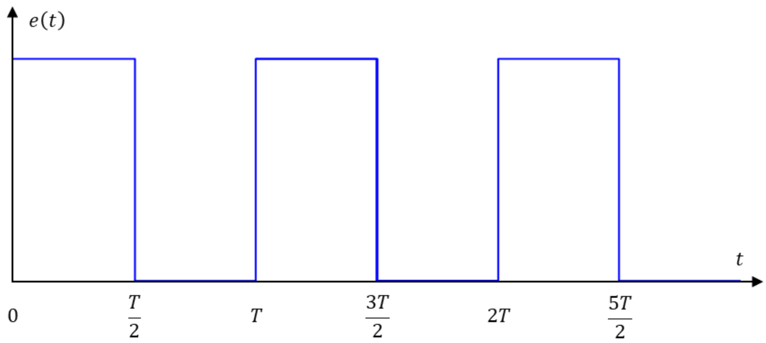
II - Montage avec des inductances

On se propose d'étudier la réponse d'un circuit (RL) à une tension en créneaux délivrée par un générateur basse fréquence (GBF).

Le circuit ci-dessous comporte une bobine parfaite d'inductance L, une résistance R et un GBF délivrant une tension en créneaux $u(t)$ représentée ci-après.

On suppose qu'en $t = 0^-$, toutes les grandeurs (intensités et tensions) sont nulles.





9) On définit la constante de temps τ, exprimée en secondes, du circuit (RL) par une relation du type $\tau = L^{\alpha} R^{\beta}$ où α et β sont deux constantes réelles. En résonant sur les relations entre i et u des dipôles, déterminer la valeur des exposants α et β.

10) Pour $0 \leq t < T/2$, établir l'équation différentielle régissant les variations de l'intensité i dans le circuit. L'intégrer en justifiant soigneusement la détermination de la (des) constante(s) d'intégration. En déduire l'expression de $u_L(t)$.

11) Tracer l'allure des courbes représentatives de $i(t)$ et de $u_L(t)$ en précisant les valeurs vers lesquelles ces fonctions tendent en régime permanent, ainsi que les pentes des tangentes à l'origine.

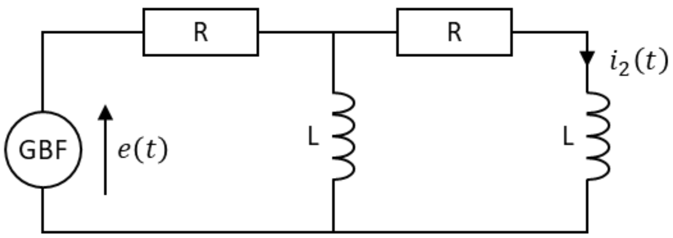
12) Quelle est la relation en continuité imposée en $t = T/2$?

13) Déterminer complètement l'expression de $i(t)$ et de $u_L(t)$ pour $T/2 \leq t < T$.

Le GBF est réglé sur la fréquence $f = 1{,}0\ \mathrm{kHz}$, la bobine a pour inductance $L = 1{,}0\ \mathrm{H}$ et $R = 1{,}0\ \mathrm{k\Omega}$.

14) Comparer la période T de la tension délivrée par le GBF et la constante de temps τ du circuit. Tracer qualitativement l'évolution des graphes de $i(t)$ et $u_L(t)$ sur quelques périodes.

On s'intéresse au circuit suivant, constitué de deux cellules (RL) enchaînées, alimenté par la même tension de précédemment. On suppose qu'en $t = 0^-$, un régime stationnaire est atteint.



15) Pour $0 \leq t < T/2$, montrer que $i_2(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_2}{dt} + \omega_0^2\, i_2(t) = 0$$

Donner le nom et établir l'expression des grandeurs ω_0 et Q.

Pour cette dernière question, on pose :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \qquad \Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

16) Déterminer $i_2(0^+)$ et $\frac{di_2}{dt}(0^+)$ puis en déduire l'expression complète de $i_2(t)$ et la tracer.

--- Fin de la partie II ---

III - Questions de cours

17) Déterminer $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour un mouvement circulaire de rayon R.

18) Définir un mouvement uniforme. Que deviennent les vecteurs de la question précédente dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ?

19) Définir la base cylindrique. Donner les expressions de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\vec{\mathrm{v}}$ et $\vec{a}$ dans cette base.

20) Définir la base sphérique. Donner les expressions de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans cette basse.

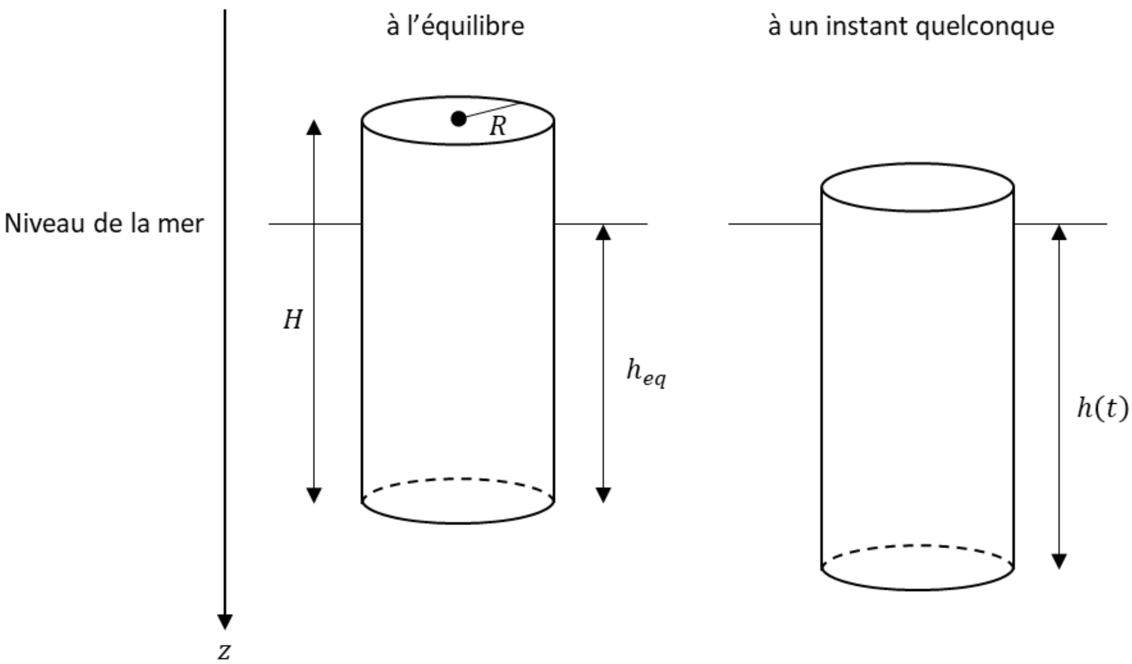
21) Déterminer le volume d'une sphère.

22) Énoncer le principe d'inertie.

-- Fin de la partie III --

IV - Mouvement d'un flotteur

Un cylindre homogène, de centre de masse G, de masse m, de hauteur H et de rayon R flotte à la surface de l'eau. On note ρ la masse volumique du fluide.



On décrit le mouvement du centre de masse G selon l'axe vertical (Oz) dirigé vers le bas. L'origine O correspond à la surface de l'eau. On note h_{eq} la hauteur immergée lorsque le flotteur est à l'équilibre. On note $h(t)$ la hauteur immergée à un instant t quelconque.

On rappelle que la poussée d'Archimède correspond à l'opposé du poids du liquide déplacé par le cylindre. En notant V_{im} le volume du cylindre immergé, on a donc :

$$\vec{\Pi}_a = -\rho V_{im} g \, \vec{u}_z$$

23) Exprimer la poussée d'Archimède en fonction de ρ, g, $h(t)$ et R.

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre en l'enfonçant dans l'eau (à la verticale). On note $h_0 = h(t = 0)$ la hauteur du cylindre immergée à $t = 0$. On le lâche sans vitesse initiale et on néglige toute source de frottement.

24) À l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué sur le cylindre, montrer que la hauteur immergée du cylindre vérifie l'équation :

$$\ddot{h}(t) + \omega_0^2 \, h(t) = \omega_0^2 \, h_{eq}$$

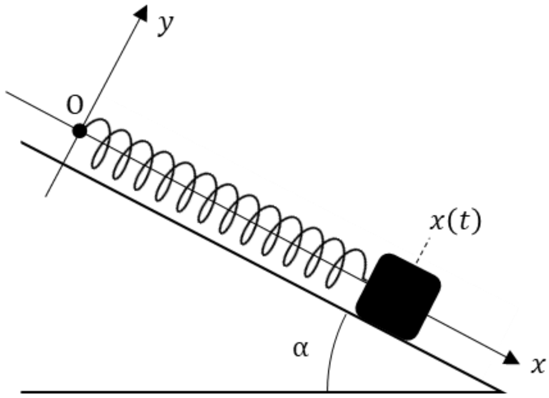
Exprimer ω_0 en fonction des constantes du problème.

25) Donner la solution cette équation différentielle et la tracer.

-- Fin de la partie IV --

V - Oscillateur amorti

On considère une masse (supposée ponctuelle), accrochée à l'extrémité d'un ressort, l'ensemble étant placé sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. On suppose que la masse est toujours en contact avec le plan incliné. On note $x(t)$ sa position.



On admet que le ressort exerce sur la masse une force :

$$\vec{F}_{el} = -k(x - \ell_0)\,\vec{u}_x$$

où k et ℓ_0 sont des constantes positives.

On suppose que la masse subie une force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -\alpha\,\vec{\mathrm{v}}$$

avec α une constante positive.

26) Montrer que $x(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = \omega_0^2\,x_{eq}$$

Déterminer les expressions de ω_0, Q et x_{eq}.

En régime pseudo-périodique, on admet que la solution s'écrit :

$$x(t) = e^{-\varepsilon\omega_0 t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$$

avec : $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\varepsilon}$ et $0 < \varepsilon \ll 1$.

27) Montrer que la solution peut également se mettre sous la forme :

$$x(t) = X_m\,e^{-\varepsilon\omega_0 t}\cos(\Omega t + \phi)$$

Déterminer X_m et ϕ en fonction de A et B.

28) On considère deux temps t_1 et t_2 s'éparés d'une pseudo-période ($t_2 > t_1$). Montrer que :

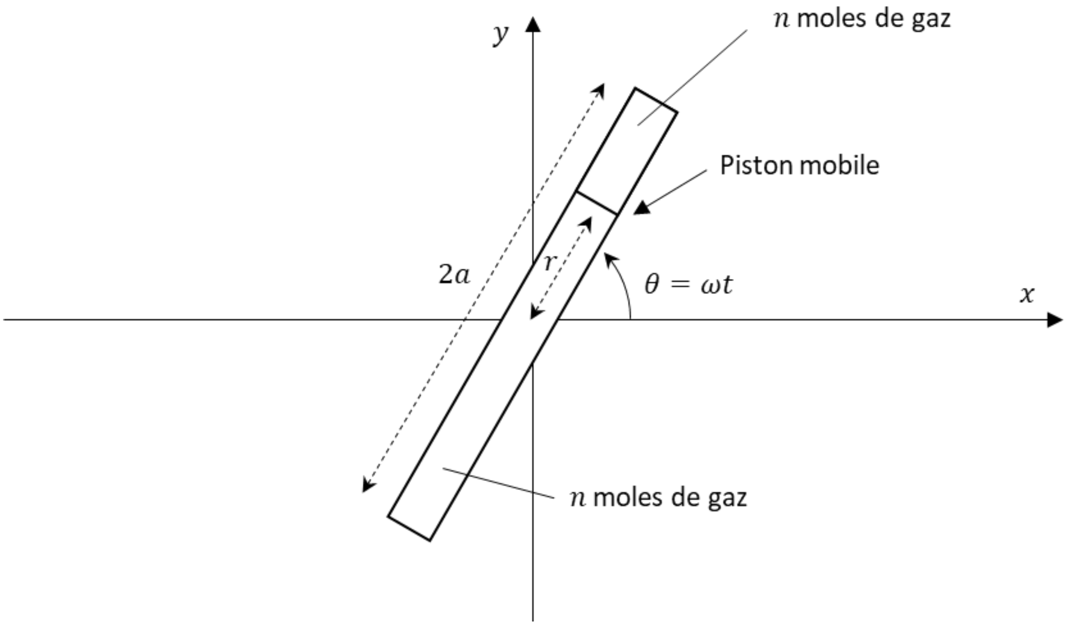
$$\ln\left(\frac{x(t_2)}{x(t_1)}\right) \simeq -2\pi\varepsilon$$

-- Fin de la partie V --

VI - Cylindre en rotation

On considère un tube cylindrique, de section S, de longueur $2a$. Un piston de masse m pouvant coulisser le long du cylindre sépare deux compartiments, chacun contenant n moles de gaz parfait maintenu à la température T_0 constante.

Le tube est mis en rotation à une vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta} = cte$ autour de l'axe z. La position du piston est repérée parles coordonnées (r, θ), avec $r \in]-a, a[$.



On admet que le piston subit uniquement les forces de pressions des gaz de chaque compartiment (d'autres forces existent mais se compensent), qui s'écrivent :

$$\vec{F}_1 = \frac{nRT_0}{a+r}\,\vec{u}_r \qquad\qquad \vec{F}_2 = -\frac{nRT_0}{a-r}\,\vec{u}_r$$

On pose la vitesse angulaire critique :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2nRT_0}{ma^2}}$$

29) Montrer que :

$$\ddot{r} = r\omega^2 - r\,\frac{a^2\omega_c^2}{a^2 - r^2}$$

<u>Propriétés et définitions</u> :

Dans cette étude, une **position d'équilibre** r_{eq} du piston est une position où $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$.

La position d'équilibre est dite **stable** si, lorsque le piston est proche de cette position ($r = r_{eq} + d$ avec $d \ll a$), le piston oscille autour de r_{eq}.

La position d'équilibre est dite **instable** si, lorsque le piston est proche de cette position ($r = r_{eq} + d$ avec $d \ll a$), le piston tend à s'éloigner de r_{eq}.

30) Montrer que le système possède 3 positions d'équilibre : l'une, notée r_0, qui existe pour toute valeur de ω ; et deux, notées r_+ et r_-, qui existent uniquement si $\omega > \omega_c$. Déterminer les expressions de r_0 et $r_\pm$.

On se place proche de r_0. On pose $r(t) = r_0 + d(t)$ avec $d(t) \ll a$.

31) À l'aide d'une simplification de l'expression de l'équation donnée à la question 29, montrer que $d(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera.

32) En déduire, en fonction de la valeur de ω, la stabilité de r_0.

--- Fin de la partie VI ---

I - Charge et décharge d'un condensateur

1) On montre d'une part que u_c est solution de l'ED :

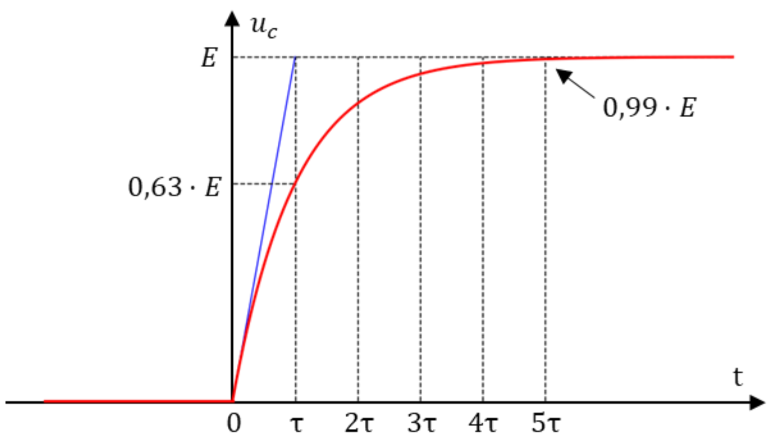
$$\dot{u}_c + \frac{u_c}{RC} = \frac{E}{RC}$$

D'autre part, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$.

On en déduit :

$$\boxed{u_c(t) = E \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)}$$

2)



3) L'énergie stockée par le condensateur au cours de la charge vaut

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}C\left(u_c^2(+\infty) - u_c^2(0^+)\right) = \boxed{\frac{1}{2}CE^2}$$

4) L'énergie fournie par le générateur est :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^{+\infty} E \cdot i(t) \cdot dt = \int_0^{+\infty} E \cdot C\frac{du_c}{dt} \cdot dt = EC\int_0^{+\infty} du_c = EC(E-0) = CE^2$$

On en déduit le rendement de la charge :

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_g} = \frac{1}{2}}$$

La puissance qui n'est pas stockée par le condensateur est perdue par effet Joule dans le condensateur.

5) On montre d'une part que u_c est solution de l'ED :

$$\dot{u}_c + \frac{u_c}{RC} = 0$$

D'autre part, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = E$.

On en déduit :

$$\boxed{u_c(t) = E \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

6) On a :

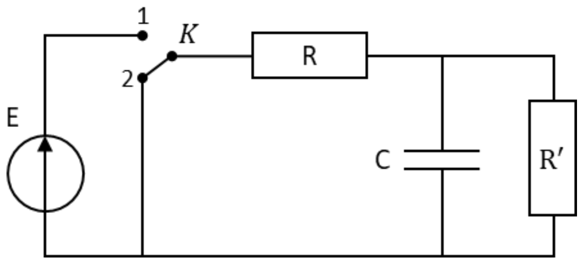
$$\ln\left(\frac{E}{U_c}\right) = \frac{t}{RC}$$

Il s'agit d'une droite linéaire de pente $1/RC > 0$.

7) On observe bien une droite linéaire de pente positive. Graphiquement, on peut lire la pente :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{6}{300} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 50\ s \neq RC}$$

S'il on modélise le voltmètre par une résistance R', le circuit devient équivalent à :



Les deux résistances sont en dérivation. On peut donc définir la nouvelle constante de temps du circuit :

$$\tau = \frac{1}{R_{eq}C} \quad \text{avec :} \quad R_{eq} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)^{-1}$$

Pour être en accord avec l'expérience, il faut :

$$R_{eq} = 5\ \text{M}\Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{R' = 10\ \text{M}\Omega}$$

8) On a les relations :

$$E = (R_g + R)i + u_c \qquad i_c = C\frac{du_c}{dt} \qquad i_{C_e} = C_e\frac{du_c}{dt} \qquad u_c = R_e i_{R_e} \qquad i = i_c + i_{R_e} + i_{C_e}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E = (R_g + R)(i_c + i_{R_e} + i_{C_e}) + u_c &= (R_g + R)\left(C\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R_e} + C_e\frac{du_c}{dt}\right) + u_c \\ &= (R_g + R)(C + C_e)\frac{du_c}{dt} + \left(1 + \frac{R_g + R}{R_e}\right) u_c \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{(R_g + R)(C + C_e)} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau = \frac{(R_g + R)(C + C_e)}{1 + \dfrac{R_g + R}{R_e}} \simeq \frac{RC}{1 + \dfrac{R}{R_e}}}$$

-- Fin de la partie I --

II - Montage avec des inductances

9) On a :

$$\begin{aligned} u_L = L\frac{di}{dt} \quad &\Rightarrow \quad \text{Tension} = [\text{L}] \cdot \frac{\text{Intensité}}{\text{Temps}} \\ u_R = R\ i \quad &\Rightarrow \quad \text{Tension} = [R] \cdot \text{Intensité} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$1 = \frac{[\text{L}] \cdot \dfrac{\text{Intensité}}{\text{Temps}}}{[R] \cdot \text{Intensité}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left[\frac{L}{R}\right] = \text{Temps}}$$

On a donc : $\boxed{\alpha = 1}$ et $\boxed{\beta = -1}$.

10) On montre d'une part que $i(t)$ est solution de l'ED :

$$\frac{di}{dt}+\frac{i}{\tau}=\frac{E}{L}$$

D'autre part, $i(0^+)=i(0^-)=0$.

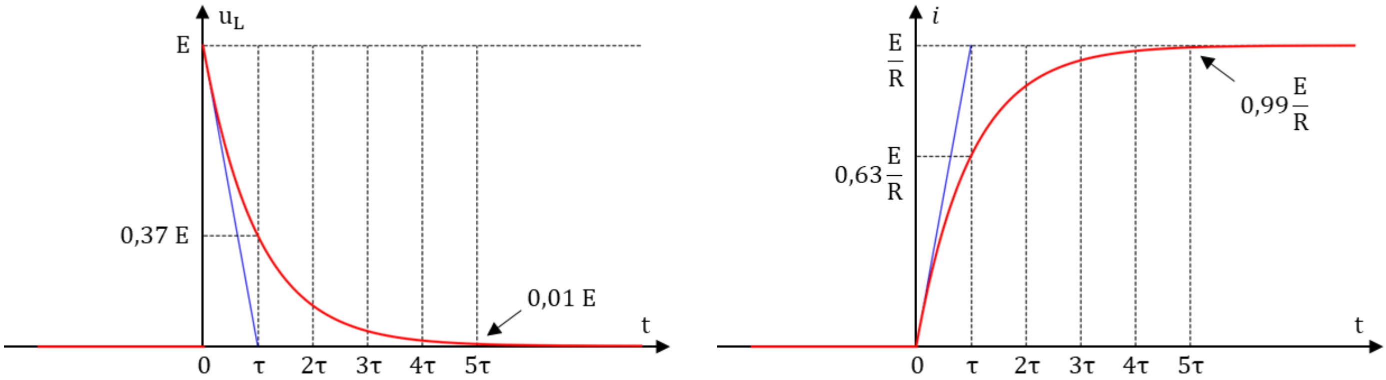
On en déduit :

$$\boxed{i(t)=\frac{E}{R}\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

On a de plus,

$$\boxed{u_L(t)=L\frac{di}{dt}=E\cdot\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

11)



Pente des tangentes à l'origine :

$$\boxed{\frac{di}{dt}(0^+)=\frac{E}{L}} \qquad \boxed{\frac{du_L}{dt}(0^+)=-\frac{E}{\tau}}$$

12) En $t=T/2$, on a :

$$\boxed{i\left(\frac{T^-}{2}\right)=i\left(\frac{T^+}{2}\right)}$$

13) On montre d'une part que $i(t)$ est solution de l'ED :

$$\frac{di}{dt}+\frac{i}{\tau}=0$$

On en déduit :

$$i(t)=A\cdot\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Or,

$$i\left(\frac{T^-}{2}\right)=i\left(\frac{T^+}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{E}{R}\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)\right)=A\cdot\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) \quad\Rightarrow\quad A=\frac{E}{R}\cdot\left(\exp\left(\frac{T}{2\tau}\right)-1\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{i(t)=\frac{E}{R}\cdot\left(\exp\left(\frac{T}{2\tau}\right)-1\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

On a de plus,

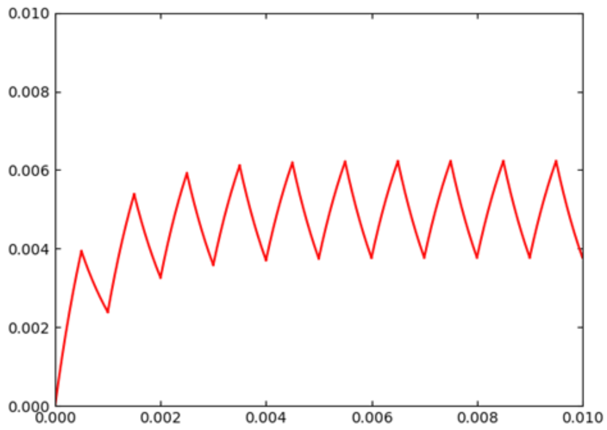
$$\boxed{u_L(t)=L\frac{di}{dt}=-E\cdot\left(\exp\left(\frac{T}{2\tau}\right)-1\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

14) On a :

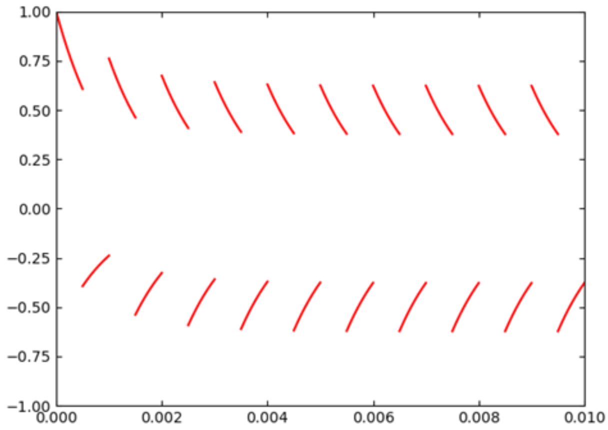
$$\boxed{T = \frac{1}{f} = 1 \text{ ms} = \tau = \frac{L}{R}}$$

15) Courbes :

$i(t)$ sur 20 demi-périodes



$u_L(t)$ sur 20 demi-périodes avec $E = 1$ V



16) Notons i_0, i_1 et i_2 les courants dans les 3 branches. On a les relations :

$$i_0 = i_1 + i_2 \qquad E = Ri_0 + L\frac{di_1}{dt} \qquad E = Ri_0 + Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} \qquad L\frac{di_1}{dt} = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt}$$

On a donc :

$$E = R(i_1 + i_2) + Ri_2 + L\frac{di_2}{dt}$$

On dérive cette expression :

$$0 = R\left(\frac{R}{L}i_2 + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + R\frac{di_2}{dt} + L\frac{d^2i_2}{dt^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{3R}{L}\frac{di_2}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 i_2(t) = 0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}} \quad \boxed{Q = \frac{1}{3}}$$

ω_0 pulsation propre

Q facteur de qualité

17) On se trouve dans un régime apériodique. Ainsi :

$$i_2(t) = e^{-\lambda t}(A\,\text{ch}(\Omega t) + B\,\text{sh}(\Omega t))$$

Par continuité de l'intensité à travers une bobine, $i_2(0^+) = i_1(0^+) = 0$.

La loi des nœuds donne donc : $i_0(0^+) = 0$.

La loi des mailles donne donc :

$$E = Ri_0 + Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{di_2}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}}$$

Ainsi :

$$i_2(0^+) = \boxed{0 = A}$$

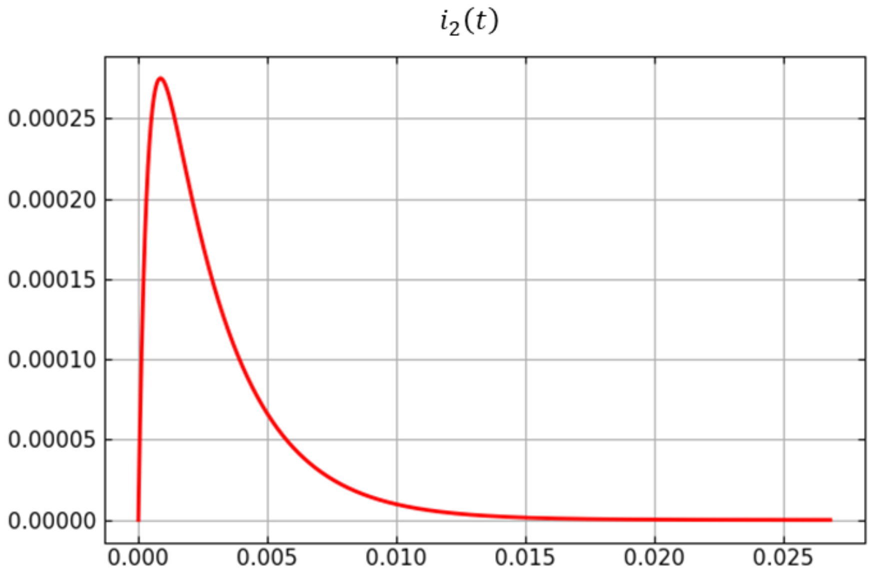
Et,

$$\frac{di_2}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t}B\,\text{sh}(\Omega t) + \Omega e^{-\lambda t}B\,\text{ch}(\Omega t) \Rightarrow \frac{di_2}{dt}(0^+) = \boxed{\frac{E}{L} = \Omega B}$$

Conclusion :

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E}{L\Omega} e^{-\lambda t} \operatorname{sh}(\Omega t)}$$

Courbe :



--- Fin de la partie II ---

III - Questions de cours

Voir cours.

--- Fin de la partie III ---

IV - Mouvement d'un flotteur

23) Avec le volume d'un cylindre :

$$\boxed{\vec{\Pi}_a = -\rho\pi R^2 h(t) g\, \vec{u}_z}$$

24) On note z_G l'altitude du centre de masse du cylindre. Puisque le cylindre est homogène :

$$z_G(t) = h(t) - \frac{H}{2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z}_G = \ddot{h}$$

On applique le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$m\ddot{z}_G = mg - \rho\pi R^2 h(t) g$$

On a donc :

$$\boxed{\ddot{h}(t) + \frac{\rho\pi R^2 g}{m} h(t) = g} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho\pi R^2 g}{m}}} \quad \boxed{h_{eq} = \frac{m}{\rho\pi R^2}}$$

25) Solution de l'ED avec les bonnes CI :

$$\boxed{h(t) = h_0 \cos(\omega_0 t)}$$

--- Fin de la partie IV ---

V - Oscillateur amorti

26) Bilan des forces :

$\vec{F}_{el} = -k(x - \ell_0)\,\vec{u}_x$
$\vec{f} = -\alpha\dot{x}\,\vec{u}_x$
$\vec{N} = N\,\vec{u}_y$
$\vec{P} = mg\big(-\cos(\alpha)\,\vec{u}_y + \sin(\alpha)\,\vec{u}_x\big)$

On applique le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La projection selon $\vec{u}_x$ donne :

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) - \alpha\dot{x} + mg\sin(\alpha)$$

Ainsi,

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k\ell_0}{m} + g\sin(\alpha)} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}} \quad \boxed{x_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}\sin(\alpha)}$$

27) On a :

$$X_m\cos(\Omega t + \phi) = X_m\cos(\Omega t)\cos(\phi) - X_m\sin(\Omega t)\sin(\phi)$$

Il suffit donc de poser : $\boxed{A = X_m\cos(\phi)}$ et $\boxed{B = -X_m\sin(\phi)}$.

On en déduit : $\boxed{X_m = \sqrt{A^2 + B^2}}$ et $\boxed{\phi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right)}$.

28) On a $t_2 = t_1 + T$ où $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x(t_2)}{x(t_1)}\right) &= \ln\left(\frac{X_m\,e^{-\varepsilon\omega_0 t_2}\cos(\Omega t_2 + \phi)}{X_m\,e^{-\varepsilon\omega_0 t_1}\cos(\Omega t_1 + \phi)}\right)\\
&= \ln\left(e^{-\varepsilon\omega_0(t_2 - t_1)}\,\frac{\cos(\Omega t_1 + 2\pi + \phi)}{\cos(\Omega t_1 + \phi)}\right)\\
&= \ln\big(e^{-\varepsilon\omega_0(t_2 - t_1)}\big)\\
&= -\varepsilon\omega_0 T
\end{aligned}$$

De plus, $\varepsilon \ll 1$, donc $\omega_0 \simeq \Omega$. On a donc :

$$\boxed{\ln\left(\frac{x(t_2)}{x(t_1)}\right) \simeq -2\pi\varepsilon}$$

-- Fin de la partie V --

VI - Cylindre en rotation

29) En base polaire, on a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r\\
&\vec{\mathrm{v}} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\omega\,\vec{u}_\theta\\
&\vec{\mathrm{a}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\,\vec{u}_\theta
\end{aligned}$$

On applique le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La projection selon $\vec{u}_r$ donne :

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = \frac{nRT_0}{a + r} - \frac{nRT_0}{a - r} \quad\Rightarrow\quad \ddot{r} = r\omega^2 + \frac{nRT_0}{m}\left(\frac{1}{a + r} - \frac{1}{a - r}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\ddot{r} = r\omega^2 - r\frac{a^2\omega_c^2}{a^2 - r^2}}$$

30) On pose $\ddot{r} = 0$ pour chercher les positions d'équilibre. Ainsi,

$$0 = r\left(\omega^2 - \frac{a^2\omega_c^2}{a^2 - r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_0 = 0} \quad \text{ou} \quad \omega^2 - \frac{a^2\omega_c^2}{a^2 - r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_\pm = \pm\, a\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

On constate que r_0 existe toujours mais $r_\pm$ existent uniquement si $\omega > \omega_c$.

31) On pose donc $d(t) = r(t) \ll a$. L'ED devient :

$$\ddot{d}(t) \simeq d(t)\omega^2 - d(t)\frac{a^2\omega_c^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{d}(t) + (\omega_c^2 - \omega^2)\cdot d(t) = 0}$$

32) Posons $\omega_0 = \sqrt{|\omega_c^2 - \omega^2|}$. On a donc :

$$\ddot{d}(t) + \omega_0^2 \cdot d(t) = 0 \quad \text{si } \omega < \omega_c$$
$$\ddot{d}(t) - \omega_0^2 \cdot d(t) = 0 \quad \text{si } \omega > \omega_c$$

Dans le premier cas, on obtient l'ED d'un oscillateur harmonique (et donc une position d'équilibre stable).

Dans le deuxième cas, la position est instable. En effet les solutions de cette ED s'écrivent : $d(t) = A\,\mathrm{ch}(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sh}(\omega_0 t)$.

-- Fin de la partie VI --