

Ce sujet est constitué de **2 parties indépendantes**, que les candidats pourront traiter dans l'ordre de leur choix.

La calculatrice est autorisée

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Accélération de protons au LHC

Le Grand Collisionneur de Hadrons (*Large Hadron Collider*, LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

Dans les accélérateurs de particules, des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournant à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire et de l'origine de la masse des particules élémentaires. Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun. Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures, guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants. L'énergie des protons est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs observent avec attention. Le 04 juillet 2012, les chercheurs ont annoncé l'observation du boson BEH (Brout-Englert-Higgs) dont l'existence était prédite par le modèle standard.

On se propose dans ce problème de comprendre quelques aspects du fonctionnement du LHC.

Dans cette partie, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite. Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

Données :

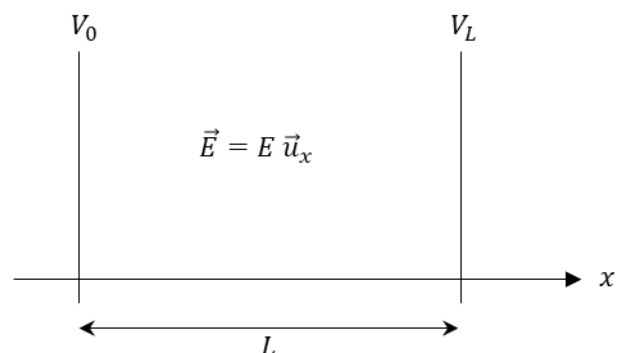
- Masse du proton $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- Charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Célérité de la lumière $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

I.1 - Particule dans un champ électrique constant et uniforme

1) Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} ?

2) Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$. On se limitera à un calcul d'ordre de grandeur.

3) La zone de l'espace où règne le champ \vec{E} (supposé uniforme) a une longueur L . En considérant que le potentiel V_0 du plan $x = 0$ est nul, exprimer le potentiel V_L du plan $x = L$.

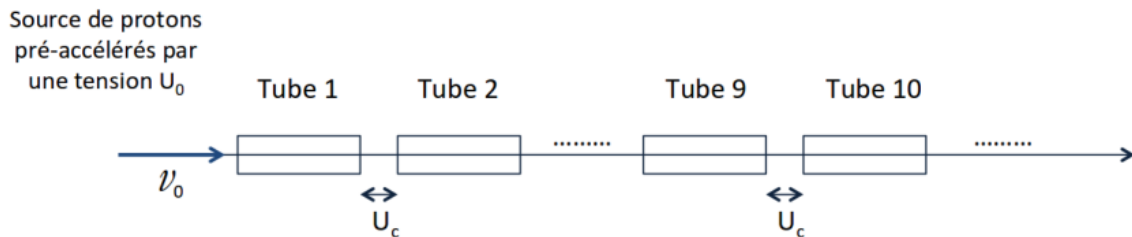


4) En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de $E = \|\vec{E}\|$ puis de V_L .

1.2 - Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_c toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en O (extrémité gauche du tube n°1) avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ parallèle à l'axe de l'accélérateur, générée par une tension pré-acceleratrice U_0 .



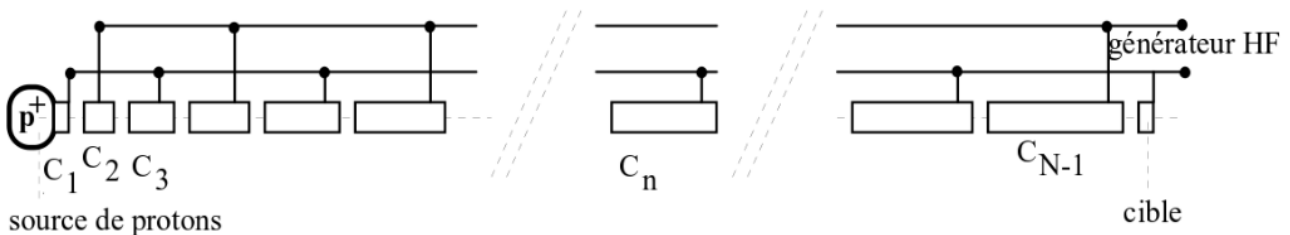
5) Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?

6) Exprimer leur énergie cinétique à la sortie du n-ième tube en fonction de U_c et U_0 .

7) Calculer, en électronvolt, la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10^{ème} tube pour $U_0 = 200$ kV et $U_c = 2\,000$ kV.

8) Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

En réalité, les électrodes de rang pairs sont reliées entre elles et à une des bornes d'un générateur de haute fréquence, les électrodes de rang impairs sont reliées entre elles et à l'autre borne du générateur. Afin de maintenir le signe de U_c constant, on applique une tension alternative de fréquence f aux bornes du générateur.

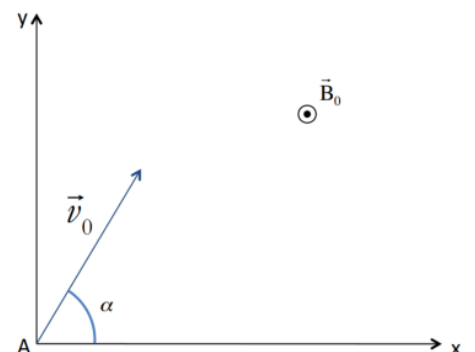


9) Établir l'expression de la longueur L_n du tube C_n . Faire l'application numérique pour le dernier tube C_{10} , en prenant $f = 500$ kHz.

1.3 - Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS). Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC. On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$. À $t = 0$ sa vitesse \vec{v}_0 est perpendiculaire au champ magnétique.

10) Donner l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique \vec{B}_0 .



Pour les questions suivantes, on considère que le proton n'est soumis qu'à cette force.

- 11) Reproduire la figure ci-dessus sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la norme de cette force en A.
- 12) Montrer que le travail associé à cette force est nul. Qu'en déduire sur le mouvement du proton ?
- 13) Déterminer les équations horaires du mouvement du proton.
- 14) Montrer que la trajectoire est un cercle et exprimer son rayon en fonction de m_p , B_0 , e et v_0 .
- 15) Quelle est la nature du mouvement du proton après sa sortie de la zone de champ magnétique ?

I.4 - Rayonnement synchrotron dans le LHC

Lorsqu'une particule est accélérée, elle perd de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique que l'on nomme rayonnement synchrotron. La puissance rayonnée dépend de la charge q de la particule, du rayon de courbure R de la trajectoire. On admet que cette puissance vaut :

$$\mathcal{P}_{ray} = \frac{Kq^2c}{\epsilon_0} \cdot R^\alpha$$

Avec K une constante sans dimension et ϵ_0 la permittivité du vide qui s'exprime en $F \cdot m^{-1}$.

- 16) En vous aidant par exemple de la relation de la puissance stockée par un condensateur, déterminer par analyse dimensionnelle la valeur de α . Commenter.

----- Fin de la partie I -----

II - Dosage d'un mélange d'acides

II.1 - Expérience

L'acide éthanóïque est un intermédiaire important de la chimie organique industrielle. Il sert notamment à la fabrication d'esters.

Données :

- Numéros atomiques : $Z(H) = 1$ $Z(C) = 6$ $Z(O) = 8$
- Produit ionique de l'eau à 298 K : $K_e = 10^{14}$
- Constante d'acidité dans l'eau à 298 K : $K_a(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 10^{-4,8}$
- L'acide chlorhydrique ($H^+ + Cl^-$) est un acide fort dans l'eau, l'hydroxyde de sodium ($Na^+ + HO^-$) est une base forte dans l'eau.
- Conductivités ioniques molaires limites à 298 K :

| Ion i | Na^+ | H_3O^+ | HO^- | CH_3COO^- | Cl^- |
|-----------------------------------|--------|----------|--------|-------------|--------|
| $\lambda_i(S \cdot cm \cdot mol)$ | 50 | 350 | 199 | 41 | 76 |

- 17) Donner la formule de Lewis des atomes d'hydrogène (H), de carbone (C) et d'oxygène (O). En déduire la valence la plus courante pour chacun de ces atomes (la valence d'un atome est le nombre de liaisons qu'un atome peut former dans une molécule).

- 18) Écrire une représentation de Lewis pour la molécule d'acide éthanóïque CH_3COOH .

En contact avec l'atmosphère, l'éthanol (CH_3CH_2OH) contenu dans le vin s'oxyde en acide éthanóïque (CH_3COOH). On obtient alors une solution appelée vinaigre. On souhaite déterminer ici la quantité d'acide éthanóïque contenu dans un litre de vinaigre à l'aide d'un dosage conductimétrique.

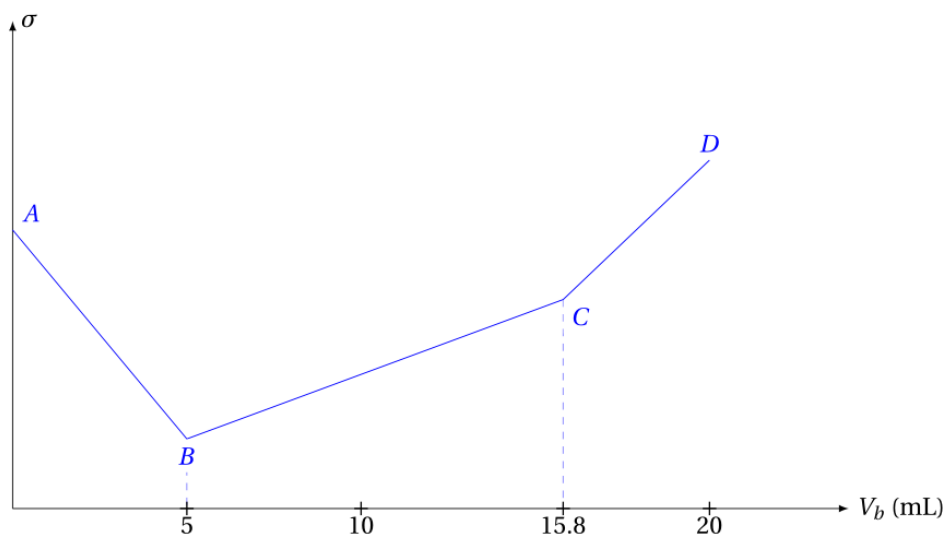
- 19) Calculer le pH d'un vinaigre où la concentration en acide éthanóïque est égale à $C_0 = 1,0 \text{ mol} \cdot L^{-1}$. Le calcul doit être effectué sans calculatrice : expliquer la démarche et les éventuelles simplifications effectuées.

Mode opératoire : On prépare un mélange M d'acide chlorhydrique ($\text{H}^+ + \text{Cl}^-$) et de vinaigre (CH_3COOH à la concentration C_a). Un litre de mélange M contient $V_1 = 50 \text{ mL}$ de vinaigre et $n_1 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ d'acide chlorhydrique (ajoutée sans variation de volume).

On prélève $V_0 = 10 \text{ mL}$ de ce mélange, on y ajoute 90 mL d'eau. On note n_0 la quantité d'acide chlorhydrique dans cette solution.

On dose la solution précédente par une solution d'hydroxyde de sodium ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$) de concentration $C_b = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Le dosage est suivi par conductimétrie. On trace (courbe ci-dessous) la conductivité de la solution, σ , en fonction du volume de solution d'hydroxyde de sodium ajouté, V_b . La courbe obtenue, $\sigma = f(V_b)$ présente trois parties : (AB), (BC), et (CD).



20) Justifier que le titrage de ce mélange d'acide correspond à deux titrages successifs. Écrire l'équation-bilan de chaque titrage et préciser sur quelle partie de la courbe (AB), (BC) ou (CD) se produit ces titrages.

21) Déterminer à l'aide de la courbe expérimentale la concentration en acide éthanoïque dans le mélange M, puis dans le vinaigre.

II.2 - Analyse de la courbe de titrage

Partie (AB)

22) Faire le bilan des ions majoritaires présents en solution au point A, puis le bilan des ions qui apparaissent et disparaissent au cours du titrage de A à B. Justifier qualitativement pourquoi la conductivité de la solution diminue.

23) Exprimer la conductivité σ_{AB} en fonction des conductivités molaires et des concentrations des espèces ioniques majoritaires dans la solution entre A et B.

24) Exprimer ces concentrations en fonction de C_b , V_b , n_0 et V_{tot} (volume total de la solution).

Dans cette partie de la courbe, on peut considérer que le volume total de la solution ne varie pas.

25) Retrouver que $\sigma_{AB} = f(V_b)$ est une droite de pente négative.

Partie (BC)

26) Faire le bilan des ions majoritaires présents en solution au point B, puis le bilan des ions qui apparaissent et disparaissent au cours du titrage de B à C. Justifier qualitativement pourquoi la conductivité de la solution diminue.

Partie (CD)

27) Que se passe-t-il après le point C ? Pourquoi la conductivité augmente-t-elle ? Justifier que la pente de CD soit supérieure à celle de BC.

----- Fin de la partie II -----

I - Accélération de protons au LHC

I.1 - Particule dans un champ électrique constant et uniforme

1) Force de Lorentz : $\vec{F} = e\vec{E}$.

2) Faisons le rapport des deux forces :

$$\frac{\|e\vec{E}\|}{\|m\vec{g}\|} \sim \frac{10^{-19} \cdot 10^5}{10^{-27} \cdot 10^1} = 10^{12} \Rightarrow \|e\vec{E}\| \gg \gg \|m\vec{g}\|$$

On peut donc négliger le poids.

3) Par définition :

$$\vec{E} = E \vec{u}_x = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x \Rightarrow E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V(x) = \underbrace{V_0}_{=0} - E \cdot x \Rightarrow V_L = -E \cdot L$$

4) On applique le TEM au proton dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \Rightarrow 0 + eV_0 = \mathcal{E}_c(L) + eV_L \Rightarrow \mathcal{E}_c(L) = -eV_L = eEL$$

I.2 - Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

5) On applique le TEM au proton dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, entre la sortie du tube n et l'entrée du tube $n + 1$.

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \Rightarrow \Delta\mathcal{E}_c = eU_c$$

6) On vient de montrer que : $\mathcal{E}_c(n + 1) = \mathcal{E}_c(n) + eU_c$. De plus, à la sortie du premier tube : $\mathcal{E}_c(1) = eU_0$. On en déduit :

$$\mathcal{E}_c(n) = eU_0 + (n - 1) \cdot eU_c$$

7) AN :

$$\mathcal{E}_c(10) = e \cdot [U_0 + 9 \cdot U_c] = e \times 18\,200 \text{ kV} = 1,82 \cdot 10^7 \text{ eV} = 18,2 \text{ MeV}$$

8) AN :

$$\mathcal{E}_c(10) = \frac{1}{2} m v_{10}^2 \Rightarrow v_{10} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c(10)}{m}} = 5,9 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette vitesse est 5 fois inférieure à la célérité de la lumière, les protons ne sont pas relativistes en sortie du Linac.

9) Dans un tube, le champ est nul, la particule ne subit donc aucune force : elle se déplace à vitesse constante v_n .

D'après l'énoncé, le proton doit parcourir le tube en un temps $\tau = \frac{L}{v} = \frac{L}{v_n}$. Ainsi :

$$v_n = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c(n)}{m}} = \frac{L_n}{\tau} \Rightarrow L_n = \frac{v_n}{2f} = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{2e}{m} \cdot (U_0 + (n - 1) \cdot U_c)}$$

On en déduit :

$$L_{10} = \frac{v_{10}}{2f} = 59 \text{ m}$$

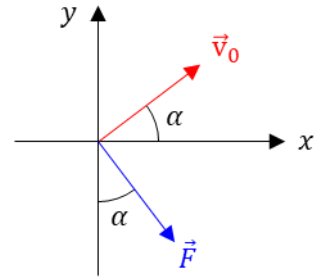
I.3 - Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

10) Force de Lorentz : $\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$.

11) Norme : $\|\vec{F}\| = ev_0B_0$ car le champ est perpendiculaire à la vitesse.

12) Travail de la force :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}) \cdot dt = \underbrace{(e\vec{v} \wedge \vec{B}_0)}_{\perp \text{ à } \vec{v}} \cdot \vec{v} dt = 0$$



Le TPC assure donc que la trajectoire du proton se fait à énergie cinétique constante, donc que la norme de la vitesse est constante.

13) On applique le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \text{ avec : } \omega_c = \frac{eB_0}{m}$$

14) Montrons que la trajectoire se fait dans le (Oxy).

$$\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = cte = 0 \text{ (Cl)} \Rightarrow \boxed{z = cte = 0} \text{ (Cl)}$$

Le mouvement est donc plan. Dans la base de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

Or, d'après la question 12, on sait que v est constante.

Le PFD donne finalement :

$$m\vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0 \Rightarrow m \frac{v_0^2}{R} = ev_0B_0 \Rightarrow \boxed{R = cte = \frac{mv_0}{eB_0}}$$

15) En sorti de champ magnétique, le proton ne subi plus aucune force. La trajectoire est rectiligne uniforme.

I.4 - Rayonnement synchrotron dans le LHC

16) Raisonons avec les unités du SI :

$$[\mathcal{P}] = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) \right] = \frac{[q^2] \cdot [c]}{[\epsilon_0]} \cdot [r]^\alpha \Rightarrow \frac{C^2}{s \cdot F} = \frac{C^2 \cdot m \cdot s^{-1}}{F \cdot m^{-1}} \cdot m^\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

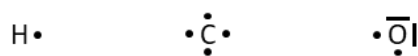
Cette puissance est d'autant plus grande que le rayon est petit. D'où la taille imposante des installations du LHC, avec un rayon de plus de 4 km, afin de limiter cette perte d'énergie lors des virages.

----- Fin de la partie I -----

II - Dosage d'un mélange d'acides

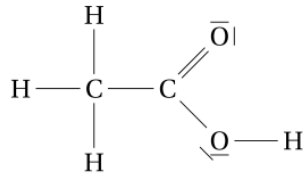
II.1 - Expérience

17) Formules de Lewis :

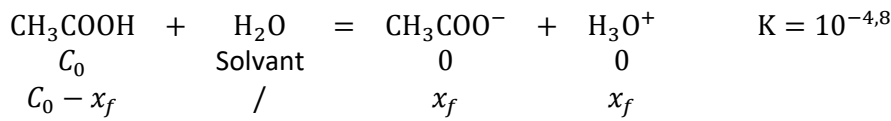


L'hydrogène est monovalent, le carbone tétravalent et l'oxygène bivalent.

18) Acide éthanoïque :



19) On envisage la réaction :



On fait l'hypothèse d'une réaction peu avancée : $x_f \ll C_0$.

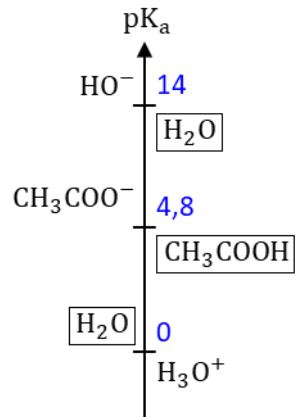
La LAM donne :

$$K = \frac{x_f^2}{(C_0 - x_f) \cdot C^\circ} \simeq \frac{x_f^2}{C_0 \cdot C^\circ} \Rightarrow \boxed{x_f = \sqrt{K \cdot C_0 \cdot C^\circ} = 10^{-2,4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

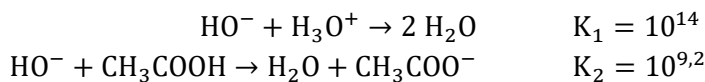
L'hypothèse est bien vérifiée.

On en déduit :

$$\boxed{\text{pH} = -\log\left(\frac{x_f}{C^\circ}\right) = 2,4}$$



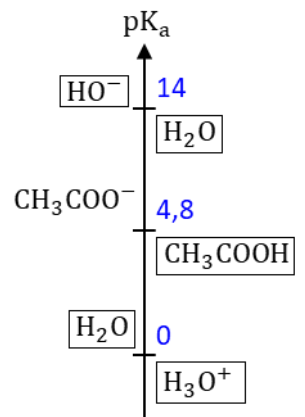
20) On est dans la situation ci-contre. Les deux réactions de titrages sont (dans l'ordre) :



Ces réactions sont supposées totales car $K \gg 10^3$. Les titrages sont successifs car $\frac{K_1}{K_2} \gg 10^4$.

La réaction (1) se produit sur la partie AB du graphe.

La réaction (2) se produit sur la partie BC du graphe.



21) Il vaut $V_e = 15,8 - 5 = 10,8$ mL de réactif titrant pour réaliser le deuxième titrage. Ainsi, la concentration en acide éthanoïque dans le mélange M vaut :

$$C_b V_e = C_{\text{CH}_3\text{COOH}} \cdot V_0 \Rightarrow \boxed{C_{\text{CH}_3\text{COOH}} = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

La concentration en acide éthanoïque dans le vinaigre vaut :

$$C_a V_1 = C_{\text{CH}_3\text{COOH}} \cdot V_0 \times 100 \Rightarrow \boxed{C_a = 1,08 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

II.2 - Analyse de la courbe de titrage

22) Au point A, les ions majoritaires sont H_3O^+ , Cl^- .

Entre A et B, on ajoute du $\text{Na}^+ + \text{HO}^-$. Or, HO^- réagit avec H_3O^+ . Ainsi, en termes de présence d'ions, chaque ion H_3O^+ est « remplacé » par un ion Na^+ .

Puisque $\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} > \lambda_{\text{Na}^+}$, la conductivité diminue.

23) La conductivité vaut :

$$\boxed{\sigma_{\text{AB}} = \lambda_{\text{Cl}^-} \cdot [\text{Cl}^-] + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] + \lambda_{\text{Na}^+} \cdot [\text{Na}^+] }$$

24) On a :

$$\boxed{[\text{Cl}^-] = \frac{n_0}{V_{\text{tot}}} \quad [\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{n_0 - C_b V_b}{V_{\text{tot}}} \quad [\text{Na}^+] = \frac{C_b V_b}{V_{\text{tot}}}}$$

25) Ainsi,

$$\sigma_{AB} = (\lambda_{\text{Cl}^-} + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+}) \cdot \frac{n_0}{V_{\text{tot}}} + \underbrace{(\lambda_{\text{Na}^+} - \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+})}_{< 0} \cdot \frac{C_b V_b}{V_{\text{tot}}}$$

Il s'agit bien d'une droite (car $V_{\text{tot}} = \text{cte}$) de pente négative.

26) Au point B, les ions majoritaires sont Na^+ , Cl^- .

Entre B et C, on ajoute du $\text{Na}^+ + \text{HO}^-$. Or, HO^- réagit avec CH_3COOH pour former CH_3COO^- . Ainsi, en termes de présence d'ions, on ajoute du Na^+ et du CH_3COO^- . La présence de nouveaux ions dans la solution fait augmenter la conductivité.

27) Après le point C, il n'y a plus de réaction. On ajoute simplement du $\text{Na}^+ + \text{HO}^-$. La présence de nouveaux ions dans la solution fait augmenter la conductivité.

Puisque $\lambda_{\text{HO}^-} > \lambda_{\text{CH}_3\text{COO}^-}$, la conductivité augmente plus rapidement entre B et C.

----- Fin de la partie II -----