

Piézoélectricité et application à l'optique adaptative

Jacques et Pierre CURIE ont découvert en 1880 l'effet piézoélectrique. Cet effet est présent dans des matériaux cristallins ne possédant pas de centre de symétrie. Il se traduit par la capacité de certains matériaux à se polariser et à faire apparaître des charges électriques de surface suite à une contrainte mécanique qui les déforme (effet direct). La déformation résultant de l'application d'un potentiel électrique est appelée l'effet inverse.

Ces deux effets permettent donc l'utilisation d'un cristal piézoélectrique à la fois comme capteur et actionneur. L'effet piézoélectrique inverse permet de contrôler le déplacement d'une structure en contrôlant la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique. De la même façon, l'effet piézoélectrique direct produira un potentiel électrique si le matériau est déformé.

L'objectif de ce problème est d'étudier cet effet et d'en présenter une application à l'optique adaptative.

De nombreuses questions sont indépendantes les unes des autres.

Le candidat notera que certaines questions sont rapides, d'autres exigent des réponses plus argumentées. Dans certains cas, la résolution du problème passe par des prises d'initiatives du candidat, il est alors attendu des explications claires sur la démarche engagée qui peut passer par des réalisations de schémas.

Un formulaire est disponible à la fin de l'énoncé.

Notations

On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

On associe à une grandeur réelle $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ la grandeur complexe $\underline{u} = \underline{U}_0 e^{j\omega t} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$.

On note A^* le conjugué du nombre complexe A .

1 Modèle électrique du quartz

Un cristal de quartz est taillé sous forme d'une lame à faces parallèles, d'épaisseur e . Sur les deux faces en regard, on effectue un dépôt métallique permettant d'obtenir deux électrodes, puis de connecter l'ensemble à un circuit électrique.

L'application d'une différence de potentiel u entre les électrodes conduit à l'apparition d'une charge $\pm q$ sur celles-ci, et à une variation d'épaisseur du quartz, d'une quantité algébrique x . La figure 1 ci-dessous définit les conventions d'orientation.

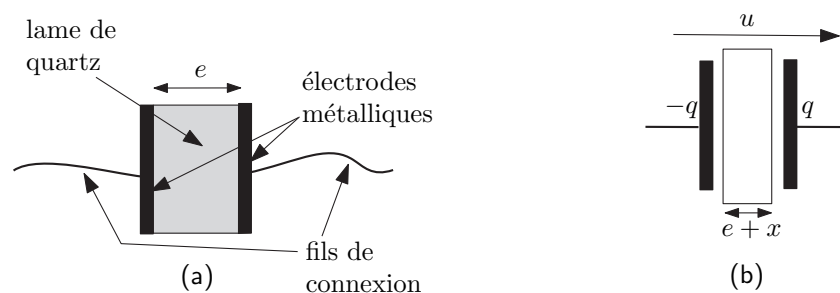


FIGURE 1 – lame de quartz. (a) Montage. (b) Représentation symbolique et définition des grandeurs.

On admet pour l'instant les équations constitutives (EC), qui seront justifiées par la suite :

$$\begin{cases} \frac{q}{C} + \alpha x = u \\ m\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx + \alpha q = 0 \end{cases} \quad (EC)$$

où on a noté $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Les coefficients C , m , δ , k et α sont des constantes positives.

1 Établir l'équation différentielle reliant la variation d'épaisseur x à la différence de potentiel appliquée aux bornes du quartz. En déduire l'équation, notée (E), vérifiée par la vitesse $v = \dot{x}$.

2 La stabilité du système est étudiée pour le régime libre $u = 0$. Qu'appelle-t-on stabilité? À quelle(s) condition(s) portant sur les coefficients le système est-il stable?

3 Dans toute la suite, on supposera que $k > C\alpha^2$. Réécrire l'équation (E) en utilisant les grandeurs :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k - C\alpha^2}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m\omega_0}{\delta}.$$

4 On suppose que $u(t)$ est un échelon de tension :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{constante pour } t > 0 \end{cases}$$

Le cristal de quartz est initialement au repos. Pour $Q > 1/2$, montrer que la solution $v(t)$ de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} \sin(\omega'_0 t)$$

et donner les expressions de τ et ω'_0 en fonction de Q et ω_0 . On ne cherchera pas à déterminer la constante A . Que dire de ω_0 lorsque $Q \gg 1$; à quelle situation physique cette limite correspond-elle?

5 On définit le temps de réponse τ_q du quartz comme le temps au bout duquel l'enveloppe du signal est inférieure à 5% de sa valeur initiale. Exprimer τ_q en fonction de Q et de la pseudo-période d'oscillation. En déduire une interprétation de Q .

On travaille à présent en notation complexe, le quartz étant alimenté par un générateur de pulsation ω .

6 Le courant \underline{i} parcourant le quartz est défini en convention récepteur. Définir, puis calculer à partir de (EC), l'impédance complexe \underline{Z} du dipôle. Celle-ci sera exprimée en fonction de ω , k , α , C , δ et m .

7 On cherche à montrer que ce comportement est équivalent à celui du dipôle électrique représenté sur la figure 2 ci-après.

Calculer l'impédance équivalente \underline{Z}_e du modèle proposé sur la figure, puis, par identification, vérifier qu'elle se comporte comme \underline{Z} . Donner les valeurs de C_s , R_s , L_s et C_p en fonction de C , α , m , δ et k .

La branche $\{R_s, C_s, L_s\}$ est qualifiée de branche série, ou branche dynamique ou motionnelle, et le condensateur C_p constitue la branche parallèle ou statique.

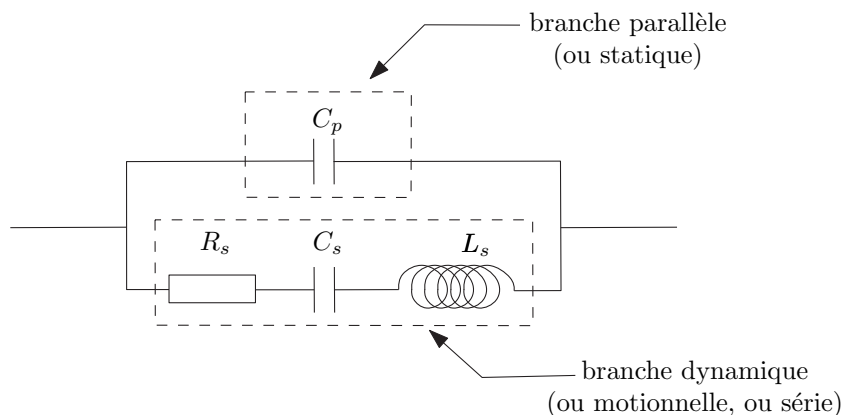


FIGURE 2 – Circuit électrique équivalent à la lame de quartz.

8 Dans les quartz réels, on peut avoir $Q \approx 10^5$, de sorte que R_s est très faible. On étudie dans cette question le cas $R_s = 0$. Montrer que l'impédance \underline{Z} peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\underline{Z} = \frac{1}{j(C_p + C_s)\omega} \times \frac{1 - \omega^2/\omega_s^2}{1 - \omega^2/\omega_p^2}$$

et donner les expressions des pulsations de résonance série ω_s et parallèle ω_p en fonction de C_p , C_s et L_s . Comparer ω_s à ω_0 (défini à la question 3).

Pourquoi parle-t-on de résonance en ω_s et d'antirésonance en ω_p ? Que vaut le courant dans la branche série à $\omega = \omega_s$?

Les valeurs typiques sont de l'ordre de $C_p \approx 10^{-12}$ F et $C_s \approx 10^{-14}$ F. Calculer alors le paramètre $\frac{\omega_p^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2}$ et donner sa valeur numérique. Qu'en conclure sur la position de ces deux pulsations?

Proposer alors une expression approchée de $(\omega_p^2 - \omega_s^2)/\omega_s^2$ en fonction de l'écart relatif entre ω_s et ω_p .

9 Dans cette question, on suppose à nouveau que $R_s \neq 0$. On veut justifier que la résonance et l'antirésonance sont bien visibles séparément.

Le facteur de qualité Q représentant le rapport entre la pulsation de résonance et la bande passante, donner la largeur de la résonance et la comparer à l'écart entre ω_s et ω_p . Si l'on avait eu $Q = 10^2$, séparerait-on la résonance de l'antirésonance?

Tracer qualitativement $|\underline{Z}|$ en fonction de ω pour $Q = 10^5$.

3 Création d'une seconde

En insérant la lame de quartz dans un circuit bouclé, on cherche à créer un circuit oscillant, dont on divise la fréquence pour obtenir un oscillateur battant la seconde.

3.1 Un exemple d'oscillateur

On se propose de réaliser le dipôle représenté sur la figure 6.

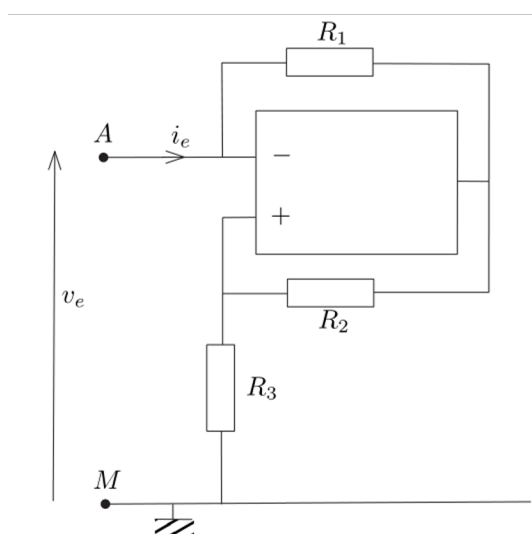
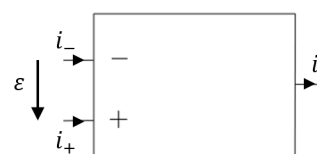


FIGURE 6 – Dipôle à résistance négative

Chose à savoir sur les ALI (pour un fonctionnement dans le régime linéaire, c'est le cas dans ce DS)

- Aucun courant ne rentre dans les entrées « - » et « + ». Donc : $i_- = i_+ = 0$
- Aucune différence de potentiel entre les entrées « - » et « + ». Donc : $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$
- Le courant de sortie i_s peut être quelconque.



Ne pas faire la Q24, qui demande essentiellement ce qui est écrit ci-dessus.

24 Le montage comprend un amplificateur opérationnel, aussi appelé amplificateur linéaire intégré (ALI). Dessiner ce composant sur votre copie, et rappeler les caractéristiques du modèle idéal de l'ALI (courants d'entrée, gain, etc.).

Dans le circuit de la figure 6, nous supposons que l'ALI est en régime de fonctionnement linéaire. Préciser la signification de ce terme, et justifier qualitativement que l'on puisse envisager ce régime.

25 En écrivant une équation reliant v_e à i_e , montrer que le dipôle AM est équivalent à une résistance négative $-R'$ dont on donnera l'expression en fonction de R_1 , R_2 et R_3 . Pourquoi un tel dipôle nécessite-t-il l'utilisation d'un composant actif ?

26 Le dipôle AM est à présent bouclé sur un circuit RLC série, la résistance R_3 étant ici variable (potentiomètre) : figure 7.

Écrire l'équation différentielle du circuit. Selon la valeur de R' (ou de R_3), peut-on faire varier la nature du régime obtenu ?

Montrer que, pour un choix pertinent de R_3 , le circuit peut être le siège d'oscillations sinusoidales dont on donnera la pulsation ω_0 en fonction des caractéristiques du circuit. On notera R_{3c} la valeur de R_3 ainsi déterminée.

27 Donner le module $|Z|$ de l'impédance du dipôle RLC série, et montrer qu'elle est minimale en $\omega = \omega_0$.

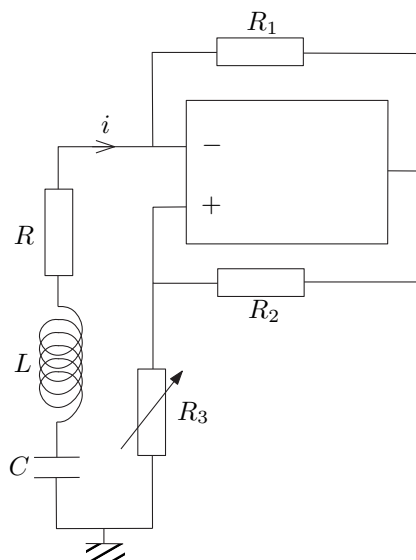


FIGURE 7 – Circuit RLC à résistance négative

Si le dipôle RLC seul était alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude fixée et de pulsation ω , qu'observerait-on pour $\omega = \omega_0$?

28 Revenant à l'équation différentielle trouvée en 26, justifier que les oscillations ne peuvent pas démarrer si la condition $R_3 = R_{3c}$ est exactement vérifiée. Comment faut-il choisir R_3 pour s'assurer du démarrage des oscillations ?

3.2 Oscillateur à quartz

Dans le montage ci-dessus à résistance négative (figure 7), on peut remplacer le dipôle RLC par la lame de quartz (figure 8). Le montage oscille lorsque la résistance R_3 est réglée à la valeur $1,0 \text{ k}\Omega$.

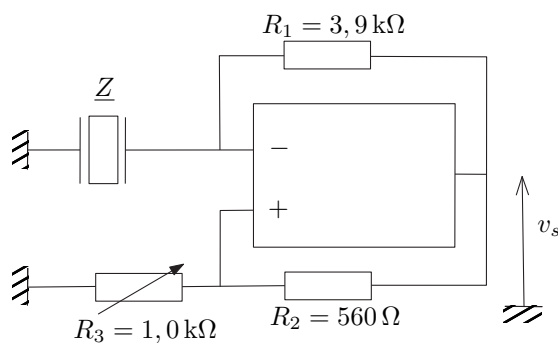


FIGURE 8 – Circuit oscillant à quartz.

29 Rappeler la pulsation, trouvée à la question 8, conduisant à la valeur minimale de l'impédance du quartz. C'est à cette pulsation qu'oscillera la tension v_s .

L'étude quantitative d'un quartz conduit aux mesures suivantes : $f_0 = 32768 \text{ Hz}$ et $Q = 22 \cdot 10^3$. En déduire les valeurs de R_s , L_s et C_s du modèle de la figure 2 : on prendra pour Q l'expression approximative $Q = \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{L_s}{C_s}}$ et on ne s'étonnera pas de la forte valeur de l'inductance équivalente, qui serait impossible à obtenir avec un bobinage réel.